関数 $f(x)$ を次によって定める．

$$f(x)=\int_0^x \left\{\sin(x-t)-\frac{t}{4}\right\}^2 dt$$

次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^x t\sin(x-t)\,dt$ を x の式で表せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ．

(26 北海道大 理系 2)

【答】

(1) $\displaystyle\int_0^x t\sin(x-t)\,dt = x-\sin x$

(2) $\displaystyle f(x)=\frac{x^3}{48}+\frac{1}{2}\sin x(1-\cos x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\frac{13}{48}$

【解答】

$$f(x)=\int_0^x \left\{\sin(x-t)-\frac{t}{4}\right\}^2 dt$$

(1) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^x t\sin(x-t)\,dt &= \left[t\cdot\frac{-\cos(x-t)}{-1}\right]_0^x-\int_0^x 1\cdot\cos(x-t)\,dt\\ &= x-\left[\frac{\sin(x-t)}{-1}\right]_0^x\\ &= \boldsymbol{x-\sin x} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(2) $$f(x)=\int_0^x \left\{\sin^2(x-t)-\frac{t}{2}\sin(x-t)+\frac{t^2}{16}\right\}dt$$

である．ここで

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^2(x-t)\,dt &= \int_0^x \frac{1-\cos 2(x-t)}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin 2(x-t)}{-2}\right]_0^x\\ &= \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\end{aligned}$$

$$\int_0^x \frac{t^2}{16}\,dt=\left[\frac{t^3}{48}\right]_0^x=\frac{x^3}{48}$$

である．(1) とあわせると

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)-\frac{1}{2}(x-\sin x)+\frac{x^3}{48}\\ &= \boldsymbol{\frac{x^3}{48}+\frac{1}{2}\sin x(1-\cos x)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{48}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\right\}\\ &= \frac{1}{48}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{13}{48}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．