

t の関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_{-1}^1 |e^x - t| dx$$

で定めるとき、 $F(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

(26 青山学院大 社会情報 C 5)

【答】 $t = 1$ のとき最小値 $e + \frac{1}{e} - 2$

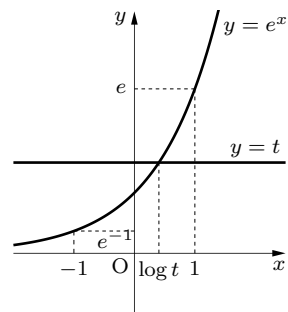
【解答】

$$F(t) = \int_{-1}^1 |e^x - t| dx$$

積分区間は $-1 \leq x \leq 1$ であり、 $e^{-1} \leq e^x \leq e$ である。直線 $y = t$ が領域 $e^{-1} \leq y \leq e$ にあるか否かで場合分けする。

(i) $e^{-1} \leq t \leq e$ のとき、 $e^x - t$ の符号は $x = \log t$ で負から正に変わるから

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^{\log t} -(e^x - t) dx + \int_{\log t}^1 (e^x - t) dx \\ &= \left[-e^x + tx \right]_{-1}^{\log t} + \left[e^x - tx \right]_{\log t}^1 \\ &= (-t + t \log t) - (-e^{-1} - t) \\ &\quad + (e - t) - (t - t \log t) \\ &= -2t + 2t \log t + e + e^{-1} \end{aligned}$$



であり、 $e^{-1} < t < e$ のとき

$$F'(t) = -2 + 2 \cdot \log t + 2t \cdot \frac{1}{t} = 2 \log t$$

である。

(ii) $t \leq e^{-1}$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^1 (e^x - t) dx = \left[e^x - tx \right]_{-1}^1 \\ &= (e - t) - (e^{-1} + t) = e - e^{-1} - 2t \end{aligned}$$

であり、 $t < e^{-1}$ のとき

$$F'(t) = -2$$

である。

(iii) $t \geq e$ のとき

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^1 -(e^x - t) dx = - \left[e^x - tx \right]_{-1}^1 \\ &= -e + e^{-1} + 2t \end{aligned}$$

であり、 $t > e$ のとき

$$F'(t) = 2$$

である。

$F(t)$ の増減は下表となる.

t	...	e^{-1}	...	1	...	e	...
$F'(t)$	-2		-	0	+		2
$F(t)$	↘	$e - 3e^{-1}$	↘		↗	$e + e^{-1}$	↗

よって, $F(t)$ は

$$t = 1 \text{ のとき, 最小値 } F(1) = e + e^{-1} - 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.

- $t = e^{\pm 1}$ における $F(t)$ の微分可能性を確認しておく.

(i) より $\lim_{t \rightarrow e^{-1}+0} F'(t) = 2 \log e^{-1} = -2$ であり, (ii) とあわせると

$$\lim_{t \rightarrow e^{-1}} F'(t) = -2$$

である. また, (i) より $\lim_{t \rightarrow e-0} F'(t) = 2 \log e = 2$ であり, (iii) とあわせると

$$\lim_{t \rightarrow e} F'(t) = 2$$

である.

よって, $F(t)$ は $t = e^{\pm 1}$ において微分可能であり, 実数全体で微分可能であることが分かった.