

関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  を  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = xe^{x^2}$  と定める. ただし, 対数は自然対数とし,  $e$  は自然対数の底とする.

- (1)  $x > 0$  に対して, 関数  $h(x)$  を  $h(x) = \log f(x) - \log g(x)$  と定める. 関数  $h(x)$  を  $x$  の多項式として表せ.  
 (2)  $f(x) = g(x)$  を満たす実数  $x$  をすべて求めよ.  
 (3) 曲線  $y = f(x)$  と曲線  $y = g(x)$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ.

(26 室蘭工大 2)

【答】

- (1)  $h(x) = x - x^2$   
 (2)  $x = 0, 1$   
 (3)  $S = \frac{3-e}{2}$

【解答】

$$f(x) = xe^x, g(x) = xe^{x^2}$$

- (1)  $h(x) = \log f(x) - \log g(x)$  ( $x > 0$ ) は

$$\begin{aligned} h(x) &= \log(xe^x) - \log(xe^{x^2}) \\ &= (\log x + \log e^x) - (\log x + \log e^{x^2}) \\ &= (\log x + x) - (\log x + x^2) \\ &= x - x^2 \end{aligned}$$

……(答)

である.

- (2)  $f(x) = g(x)$  を満たす実数  $x$  は

$$\begin{aligned} xe^x &= xe^{x^2} \\ x(e^x - e^{x^2}) &= 0 \\ \therefore x = 0 \text{ または } e^x &= e^{x^2} \\ \therefore x = 0 \text{ または } x &= x^2 \\ \therefore \mathbf{x = 0, 1} \end{aligned}$$

……(答)

である.

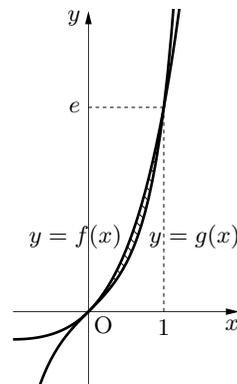
- (3) (2) より, 2 曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  の交点の  $x$  座標は  $x = 0, 1$  であり,  $0 \leq x \leq 1$  に対して

$$x \geq x^2 \quad \therefore e^x \geq e^{x^2} \quad \therefore xe^x \geq xe^{x^2}$$

であるから,  $f(x) \geq g(x)$  であり, 曲線  $y = f(x)$  と曲線  $y = g(x)$  で囲まれた図形は右図の斜線部分となる. この図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 xe^{x^2} dx \\ &= \left[ (x-1)e^x \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= \{0 - (-1)\} - \frac{e-1}{2} \\ &= \frac{3-e}{2} \end{aligned}$$

……(答)



である.