関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=xe^x$, $g(x)=xe^{x^2}$ と定める．ただし，対数は自然対数とし，$e$ は自然対数の底とする．

(1) $x>0$ に対して，関数 $h(x)$ を $h(x)=\log f(x)-\log g(x)$ と定める．関数 $h(x)$ を $x$ の多項式として表せ．

(2) $f(x)=g(x)$ を満たす実数 $x$ をすべて求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めよ．

(26 室蘭工大 2)

---

【答】

(1) $h(x)=x-x^2$

(2) $x=0,\ 1$

(3) $S=\dfrac{3-e}{2}$

---

【解答】

$$f(x)=xe^x,\ g(x)=xe^{x^2}$$

(1) $h(x)=\log f(x)-\log g(x)$ $(x>0)$ は

$$\begin{aligned} h(x)&=\log(xe^x)-\log(xe^{x^2})\\ &=(\log x+\log e^x)-(\log x+\log e^{x^2})\\ &=(\log x+x)-(\log x+x^2)\\ &=\boldsymbol{x-x^2} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $f(x)=g(x)$ を満たす実数 $x$ は

$$xe^x=xe^{x^2}$$

$$x(e^x-e^{x^2})=0$$

$$\therefore\quad x=0 \text{ または } e^x=e^{x^2}$$

$$\therefore\quad x=0 \text{ または } x=x^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=0,\ 1} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) より，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の交点の $x$ 座標は $x=0,\ 1$ であり，$0\leqq x\leqq 1$ に対して

$$x\geqq x^2 \qquad \therefore\quad e^x\geqq e^{x^2} \qquad \therefore\quad xe^x\geqq xe^{x^2}$$

であるから，$f(x)\geqq g(x)$ であり，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形は右図の斜線部分となる．この図形の面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S&=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx\\ &=\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 xe^{x^2}\,dx\\ &=\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1-\Big[\frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^1\\ &=\{0-(-1)\}-\frac{e-1}{2}\\ &=\boldsymbol{\frac{3-e}{2}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．