曲線 $y = \log x$ を C とし，原点 O を通る曲線 C の接線を ℓ とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(26 札幌医大 4)

【答】

(1) $y = \dfrac{1}{e}x$

(2) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + D$ (D は積分定数)

(3) $\dfrac{6-2e}{3}\pi$

【解答】

$$C : y = \log x$$

(1)
$$y' = \frac{1}{x}$$

C 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$$
$$\therefore\quad y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$$

である．接線 ℓ は原点を通るから

$$0 = 0 - 1 + \log t \qquad \therefore\quad t = e$$

であり，原点 O を通る曲線 C の接線 ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{\ell : y = \frac{1}{e}x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

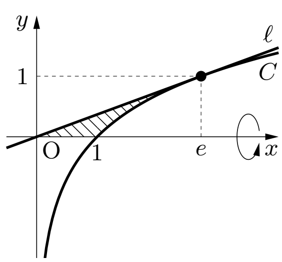
である．

(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int 1\cdot\log x\,dx\\ &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \boldsymbol{x\log x - x + D}\quad \textbf{(D は積分定数)}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形は右図の斜線部分である．これを x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は



$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\pi 1^2\cdot e - \pi\int_1^e (\log x)^2\,dx\\ &= \frac{e}{3}\pi - \pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}\\ &= \frac{e}{3}\pi - \pi\left\{e - 2\Big[x\log x - x\Big]_1^e\right\} \quad (\because\ (2))\\ &= \frac{e}{3}\pi - \pi(e-2)\\ &= \boldsymbol{\frac{6-2e}{3}\pi}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．