座標平面上の曲線 C は，媒介変数 t を用いて

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている．曲線 C の y 軸に平行な接線を ℓ とし，曲線 C，直線 ℓ および x 軸で囲まれる図形を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 正の実数 α, β に対し，次の 2 つの不定積分を求めよ．

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t \, dt, \quad J = \int e^{\alpha t} \sin \beta t \, dt$$

(3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V の値を求めよ．

(26 東北大 理系 5)

【答】

(1) $\ell : x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}$

(2) $I = \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + C_1$ (C_1は積分定数)，

$J = \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2}(-\beta \cos \beta t + \alpha \sin \beta t) + C_2$ (C_2は積分定数)

(3) $V = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{60} e^{\frac{3\pi}{4}} - \dfrac{1}{15}\right)\pi$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(1)

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

C の接線のうち y 軸に平行となるのは t が

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} \neq 0 \end{cases}$$

を満たすときである．$e^t \neq 0$ であるから

$$(*) \iff \begin{cases} \cos t - \sin t = 0 & \cdots\cdots ① \\ \sin t + \cos t \neq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．$\cos t = 0$ とすると $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ より $\sin t = \pm 1$ であり，これは ① に反する．$\cos t \neq 0$ としてよく，このとき ① より

$$\tan t = 1 \qquad \therefore \quad t = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because \ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

となり，② も成り立つ．

よって，接線 ℓ の方程式は

$$\ell : \boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $$I=\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt,\quad J=\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt$$

$e^{\alpha t}\cos\beta t$, $e^{\alpha t}\sin\beta t$ の原始関数をみつける．

$$(e^{\alpha t}\cos\beta t)'=\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad \cdots\cdots ③$$
$$(e^{\alpha t}\sin\beta t)'=\beta e^{\alpha t}\cos\beta t+\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad \cdots\cdots ④$$

③ $\times\,\alpha\,+$ ④ $\times\,\beta$： $\alpha(e^{\alpha t}\cos\beta t)'+\beta(e^{\alpha t}\sin\beta t)'=(\alpha^2+\beta^2)e^{\alpha t}\cos\beta t$

③ $\times\,\beta\,-$ ④ $\times\,\alpha$： $\beta(e^{\alpha t}\cos\beta t)'-\alpha(e^{\alpha t}\sin\beta t)'=-(\alpha^2+\beta^2)e^{\alpha t}\sin\beta t$

であり

$$\frac{(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t+\beta e^{\alpha t}\sin\beta t)'}{\alpha^2+\beta^2}=e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$\frac{(-\beta e^{\alpha t}\cos\beta t+\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t)'}{\alpha^2+\beta^2}=e^{\alpha t}\sin\beta t$$

であるから

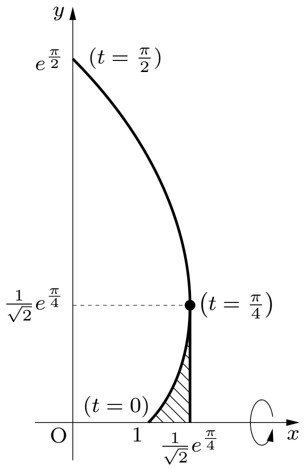
$$\boldsymbol{I}=\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta t+\beta\sin\beta t)+C_1}\ \textbf{(}\boldsymbol{C_1}\textbf{は積分定数)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$
$$\boldsymbol{J}=\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(-\beta\cos\beta t+\alpha\sin\beta t)+C_2}\ \textbf{(}\boldsymbol{C_2}\textbf{は積分定数)} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

- I, J をそれぞれ 1 回部分積分し
$$\begin{cases} I=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos\beta t+\dfrac{\beta}{\alpha}J \\ J=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\beta t-\dfrac{\beta}{\alpha}I \end{cases}$$
を導き，I, J について解いてもよい．
- 2 回部分積分して I, J についての関係式
$$I=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\cos\beta t+\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\beta^2}{\alpha^2}I$$
$$J=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin\beta t-\frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha t}\cos\beta t-\frac{\beta^2}{\alpha^2}J$$
を導き，I, J についてそれぞれ整理してもよい．

(3) $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ での x, y の増減は下表となる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	1	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\uparrow$	$e^{\frac{\pi}{2}}$



C のグラフは右図となり，曲線 C，直線 ℓ および x 軸で囲まれる図形 D は斜線部分である．

D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}} y^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2\,\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t}\sin^2 t\cdot e^t(\cos t-\sin t)\,dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}(\sin^2 t\cos t-\sin^3 t)\,dt \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\left(\frac{\sin 2t\sin t}{2}-\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}\right)dt \quad (\because\ 2\text{ 倍角, }3\text{ 倍角の公式}) \\
&= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\left(\frac{\cos t-\cos 3t}{4}-\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}\right)dt \quad (\because\ \text{積を和に直す公式}) \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t}\left(\cos t-\cos 3t-3\sin t+\sin 3t\right)dt \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3t}(3\cos t+\sin t)}{3^2+1^2}-\frac{e^{3t}(3\cos 3t+3\sin 3t)}{3^2+3^2}\right. \\
&\qquad\left.-3\,\frac{e^{3t}(3\sin t-\cos t)}{3^2+1^2}+\frac{e^{3t}(3\sin 3t-3\cos 3t)}{3^2+3^2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{3t}(6\cos t-8\sin t)}{10}-\frac{6e^{3t}\cos 3t}{18}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4}\left\{\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}(3\sqrt{2}-4\sqrt{2})}{10}+\frac{3e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{18}-\frac{6}{10}+\frac{6}{18}\right\} \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{-e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{10}+\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{6}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\frac{2e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{30}-\frac{4}{15}\right) \\
&= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{60}e^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{1}{15}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．