実数 k を定数とする．原点を O とする座標平面において，曲線 $C: y=\sin x$ と直線 $\ell: y=kx$ がある．このとき，次の問 (i)〜(v) に答えよ．解答欄には，(i)，(ii) については答えのみを，(iii)〜(v) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(i) 正の実数 x に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

により定める．このとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．また，$0<x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表を解答欄に記入せよ．

(ii) 次の空欄に適切な数値を記入せよ．

ℓ と C が $0<x<\pi$ においてただ 1 つの共有点を持つための必要十分条件は，$\boxed{\text{ア}}<k<\boxed{\text{イ}}$ である．

(iii) k が (ii) の条件を満たすとき，$0<x<\pi$ における ℓ と C の共有点の x 座標を a $(0<a<\pi)$ とする．$0\leqq x\leqq a$ において ℓ と C で囲まれる図形の面積を S_1，$a\leqq x\leqq\pi$ において ℓ，C および直線 $x=\pi$ で囲まれる図形の面積を S_2 とする．$S_1-S_2=0$ となる k の値を求めよ．

(iv) k を (iii) で求めた値とする．$0<x<\pi$ における ℓ と C の共有点の x 座標を a $(0<a<\pi)$ とする．$0\leqq x\leqq a$ において ℓ と C で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体を V_1 とする．また，$a\leqq x\leqq\pi$ において ℓ，C および直線 $x=\pi$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．V_1-V_2 の値を求めよ．

(v) (iv) の V_1，V_2 に対して，

(a) $V_1=V_2$　　(b) $V_1>V_2$　　(c) $V_1<V_2$

のどれが正しいかを，理由をつけて述べよ．ただし，$3.1<\pi<3.2$ は証明せずに用いてよい．

(26 立教大 理系 2 月 6 日 3)

【答】

(i) $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，増減表は略

(ii) $0<k<1$

(iii) $k=\dfrac{4}{\pi^2}$

(iv) $V_1-V_2=\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{16}{3}$

(v) (c)

【解答】

$$C: y=\sin x\quad \ell: y=kx$$

(i)

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\ (x>0)$$

$$f'(x)=\boldsymbol{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．$f'(x)$ の符号は分母が正であるから，分子の符号と一致する．$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおく．

$$\begin{aligned}g'(x)&=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x\\&=-x\sin x\end{aligned}$$

であり，$0<x<\pi$ においては $g'(x)<0$ であり，$g(x)$ は減少関数である．$g(0)=0-0=0$ であり，$0<x\leqq\pi$ においては

$$g(0)>g(x) \qquad \therefore\quad 0>g(x)$$

である．よって，$0<x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	0

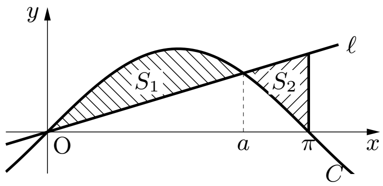
(ii) ℓ と C が $0<x<\pi$ においてただ 1 つの共有点を持つための必要十分条件は

$$\sin x=kx \text{ が } 0<x<\pi \text{においてただ 1 つの共有点を持つ}$$
$$\iff \frac{\sin x}{x}=k \text{ が } 0<x<\pi \text{においてただ 1 つの共有点を持つ}$$
$$\iff \boldsymbol{0<k<1} \quad (\because\ (\mathrm{i}))$$

……(答)

である．

(iii) S_1，S_2 は右図の斜線部分の面積である．



$$\begin{aligned}
&S_1-S_2\\
&=\int_0^a(\sin x-kx)\,dx-\int_a^\pi(kx-\sin x)\,dx\\
&=\int_0^\pi(\sin x-kx)\,dx\\
&=\Big[-\cos x-k\frac{x^2}{2}\Big]_0^\pi\\
&=-(-1)-\frac{\pi^2}{2}k+1\\
&=2-\frac{\pi^2}{2}k
\end{aligned}$$

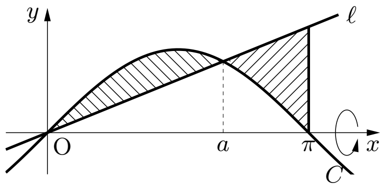
であるから，$S_1-S_2=0$ となる k の値は

$$2-\frac{\pi^2}{2}k=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{k=\frac{4}{\pi^2}}$$

……(答)

である．

(iv) $k=\dfrac{4}{\pi^2}$ のときを考える．



$$\begin{aligned}
&V_1-V_2\\
&=\left\{\int_0^a\pi\sin^2 x\,dx-\int_0^a\pi(kx)^2\,dx\right\}\\
&\quad-\left\{\int_a^\pi\pi(kx)^2\,dx-\int_a^\pi\pi\sin^2 x\,dx\right\}\\
&=\int_0^\pi\pi\sin^2 x\,dx-\pi\int_0^\pi(kx)^2\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\,(k\pi)^2\cdot\pi \quad (\because\ \text{第 2 項は円錐の体積を考えた})\\
&=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi-\frac{1}{3}k^2\pi^4\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot\pi-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2\pi^4\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}-\frac{16}{3}}
\end{aligned}$$

……(答)

である．

(v) $3.1 < \pi < 3.2$ であるから

$$\frac{3.1^2}{2} < \frac{\pi^2}{2} < \frac{3.2^2}{2}$$

$$\frac{9.61}{2} - \frac{16}{3} < \frac{\pi^2}{2} - \frac{16}{3} < \frac{10.24}{2} - \frac{16}{3}$$

$$4.805 - 5.33\cdots < \frac{\pi^2}{2} - \frac{16}{3} < 5.12 - 5.33\cdots$$

$\dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{16}{3} < 0$ であり，(iv) とあわせると

$$V_1 < V_2 \qquad (\mathbf{c})$$ ……（答）

である．