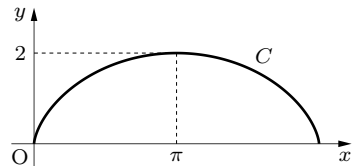


$f(t) = t - \sin t$, $g(t) = 1 - \cos t$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\frac{d}{dt}f(t)$, $\frac{d}{dt}g(t)$ をそれぞれ求めよ.
 (2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt$ を求めよ.
 (3) 媒介変数表示 $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)
 で表される xy 平面上の曲線を C とする.



ア. $0 < a < 2\pi$ とする. 曲線 C 上の点
 $(a - \sin a, 1 - \cos a)$ における法線の方程式を
 求めよ.

イ. 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積
 V を求めよ.

(26 豊橋技科大 3)

【答】

- (1) $\frac{d}{dt}f(t) = 1 - \cos t$, $\frac{d}{dt}g(t) = \sin t$
 (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt = \frac{2}{3}$
 (3) ア. $(1 - \cos a)(x - a) + (\sin a)y = 0$ イ. $V = 5\pi^2$

【解答】

$$f(t) = t - \sin t, \quad g(t) = 1 - \cos t$$

(1) 微分すると

$$\frac{d}{dt}f(t) = 1 - \cos t, \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\frac{d}{dt}g(t) = \sin t \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(2) 置換積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)(\sin t)' \, dt = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

$$(3) \quad C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

ア. $0 < t < 2\pi$ のとき, (1) より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}f(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

曲線 C 上の点 $(a - \sin a, 1 - \cos a)$ ($0 < a < 2\pi$) における法線の方程式は

- $a \neq \pi$ のとき

$$y = -\frac{1 - \cos a}{\sin a}(x - a + \sin a) + 1 - \cos a$$

$$\therefore y = -\frac{1 - \cos a}{\sin a}(x - a)$$

- $a = \pi$ のとき

$$x = \pi$$

である.

まとめると, 求める法線の方程式は

$$(1 - \cos a)(x - a) + (\sin a)y = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

イ. 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求める.

t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くとき, x は $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲を動くから

$$V = \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi y^2 \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} \pi(1 - \cos t)^2(1 - \cos t) dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \cos^3 t \right\} dt$$

$$= \pi \left[t - 3\sin t + \frac{3}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} - \pi \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi}$$

(\therefore 第 4 項は (2) の積分区間を変えたものである)

$$= \pi \left(2\pi - 3 \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) - \pi \cdot 0$$

$$= 5\pi^2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.