1 個のさいころを 2 回投げ，1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b とする．このとき，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が重解をもつ確率は $\boxed{\text{イ}}$ であり，また，異なる 2 つの整数を解にもつ確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(26 立教大 理系 2 月 9 日 1(2))

【答】

イ	ウ
$\dfrac{1}{18}$	$\dfrac{5}{36}$

【解答】

$$x^2 - ax + b = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ の判別式を D とおくと

$$D = a^2 - 4b$$

であり，$(*)$ が重解をもつ条件は

$$D = 0 \iff a^2 = 4b \qquad \cdots\cdots ①$$

である．$a,\ b$ は $1 \leqq a \leqq 6,\ 1 \leqq b \leqq 6$ を満たす整数であるから，① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$$

である．求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{18}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，$(*)$ が異なる 2 つの整数を解にもつためには

$D > 0$ かつ D は平方数である

ことが必要である．$D = a^2 - 4b$ の値は右表となり，正の平方数は 5 個ある．それぞれの $(a,\ b)$ について解

$$x = \frac{a \pm \sqrt{D}}{2}$$

が整数であるか否かを確かめる．

$D = a^2 - 4b$ の値

	b	1	2	3	4	5	6
a	a^2 \ $4b$	4	8	12	16	20	24
1	1	−	−	−	−	−	−
2	4	0	−	−	−	−	−
3	9	5	1	−	−	−	−
4	16	12	8	4	0	−	−
5	25	21	17	13	9	5	1
6	36	32	28	24	20	16	12

(− は負の値を表す)

$(a,\ b) = (3,\ 2)$ のとき，$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = 1,\ 2$

$(a,\ b) = (4,\ 3)$ のとき，$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = 1,\ 3$

$(a,\ b) = (5,\ 4)$ のとき，$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = 1,\ 4$

$(a,\ b) = (5,\ 6)$ のとき，$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = 2,\ 3$

$(a,\ b) = (6,\ 5)$ のとき，$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = 1,\ 5$

であり，いずれも 2 つの整数が解をもつ．

よって，求める解は

$$\frac{5}{6^2} = \boldsymbol{\frac{5}{36}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．