2 個の数字 1, 2 を無作為に重複を許して並べて 10 桁の整数を作る．このとき，以下の問いに答えよ．

1. 隣り合う 2 個の数字がすべて異なる整数の数は $\boxed{22}$ 個である．
2. 隣り合う 2 個の数字が 1 回だけ同じである整数の数は $\boxed{23}\boxed{24}$ 個であり，ちょうど 3 回同じである整数の数は $\boxed{25}\boxed{26}\boxed{27}$ 個である．
3. 最初と最後の数字が隣り合っているとして考えるとき，隣り合う 2 個の数字がすべて異なる確率は $\dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}\boxed{30}\boxed{31}}$ である．

(26 青山学院大 経済 2(1))

【答】

22	2324	252627	28	293031
2	18	168	1	512

【解答】

1. 隣り合う 2 個の数字がすべて異なる 10 桁の整数は，最高位の数が決まる (2 通り) と 10 個の数の並び方は一意に決まるから，求める整数の数は

   2 個 ……(答)

   である．

   - 「$\underbrace{1212\cdots12}_{10\text{ 個}}$」と「$\underbrace{2121\cdots21}_{10\text{ 個}}$」の 2 個である．

2. 隣り合う 2 個の数字が 1 回だけ同じである整数は，隣り合う数字が同じであるのは「11」,「22」のいずれかである．

   隣り合う同じ数字が「11」のとき,「11」を 1 とみなすと，作られる整数は隣り合う 2 個の数字がすべて異なる 9 桁の整数とみることができる.「11」の位置は 9 か所あり,「11」の位置が決まれば残りの 8 個の数の並び方は一意に決まる．

   隣り合う数字が「22」のときも同じであるから，求める整数の数は

   $2 \times 9 = \mathbf{18}$ 個 ……(答)

   である．

   隣り合う 2 個の数字がちょうど 3 回同じである整数は，隣り合う同じ数字が 1 か所，2 か所，3 か所の場合に分けられる．

   (i) 隣り合う同じ数字が 1 か所のとき，隣り合う同じ数字は

   (ア)「1111」　(イ)「2222」

   のいずれかである．

   (ア) 隣り合う同じ数字が「1111」のとき,「1111」を 1 とみなすと，作られる整数は隣り合う 2 個の数字がすべて異なる 7 桁の整数とみることができる.「1111」の位置は 7 か所あり,「1111」の位置が決まれば残りの 6 個の数の並び方は一意に決まる．

   (イ) 隣り合う同じ数字が「2222」のときも同じである．

   よって，このときの整数の数は

   $2 \times 7 = 14$ 個

   である．

   (ii) 隣り合う同じ数字が 2 か所のとき，隣り合う同じ数字は

   (ア)「111」と「11」　(イ)「111」と「22」
   (ウ)「222」と「22」　(エ)「222」と「11」

のいずれかである．

(ア) 使われる数字は次の 2 通りがある．

- 「111」,「11」, 1, 1, 2, 2, 2 のとき
  「111」,「11」, 1, 1 を並べた後，隙間に 2, 2, 2 を 1 つずつおけば題意の並べ方ができるから $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 個　である．
- 「111」,「11」, 1, 2, 2, 2, 2 のとき
  「111」,「11」, 1 を並べた後，両端および隙間に 2, 2, 2, 2 を 1 つずつおけば題意の並べ方ができるから　$3! = 6$ 個　である．

このときの並べ方は

$$12 + 6 = 18 \text{ 個}$$

ある．

(イ) 使われる数字は次の 2 通りがある．

- 「111」, 1, 1, 1,「22」, 2, 2 のとき
  「111」, 1, 1, 1 の並べ方は 4 通り．その各々について隙間に「22」, 2, 2 を並べるのは 3 通りあるから　$4 \times 3 = 12$ 個　である．
- 「111」, 1, 1,「22」, 2, 2, 2 のとき
  「111」, 1, 1 の並べ方は 3 通り．その各々について両端および隙間に「22」, 2, 2, 2 を並べるのは 4 通りあるから　$3 \times 4 = 12$ 個　である．

このときの並べ方は

$$12 + 12 = 24 \text{ 個}$$

である．

(ウ) (ア) と同じであり，18 個ある．

(エ) (イ) と同じであり，24 個ある．

(ア)〜(ウ) をあわせると

$$18 + 24 + 18 + 24 = 84 \text{ 個}$$

である．

(iii) 隣り合う同じ数字が 3 か所のとき，隣り合う同じ数字は

(ア)「11」と「11」と「11」　(イ)「11」と「11」と「22」
(ウ)「11」と「22」と「22」　(エ)「22」と「22」と「22」

のいずれかである．

(ア) 使われる数字は次の 2 通りがある．

- 「11」,「11」,「11」, 1, 2, 2, 2 のとき
  「11」,「11」,「11」, 1 の並べ方は 4 通り．その各々について隙間に 2, 2, 2 を 1 つずつ並べると，題意の並べ方ができるから　4 個　である．
- 「11」,「11」,「11」, 2, 2, 2, 2 のとき題意の並べ方ができるから　1 個　である．

このときの並べ方は

$$4 + 1 = 5 \text{ 個}$$

である．

(イ) 使われる数字は次の 2 通りがある．

- 「11」,「11」, 1, 1,「22」, 2, 2 のとき
  「11」,「11」, 1, 1 の並べ方は $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ 通り．その各々について隙間に「22」, 2, 2 を 1 つずつ並べると，題意の並べ方ができるから　$6 \times 3 = 18$ 個　である．
- 「11」,「11」, 1,「22」, 2, 2, 2 のとき
  「11」,「11」, 1 の並べ方は 3 通り．その各々について両端および隙間に「22」, 2, 2, 2 を 1 つずつ並べると，題意の並べ方ができるから　$3 \times 4 = 12$ 個　である．

このときの並べ方は

$$18+12=30 \text{ 個}$$

である．

(ウ) (イ) と同じであり 30 個

(エ) (ア) と同じであり 5 個

(ア)〜(ウ) をあわせると

$$5+30+30+5=70 \text{ 個}$$

である．

以上，(i)，(ii)，(iii) をあわせると

$$14+84+70=\mathbf{168} \text{ 個} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

3. 数字 1 または 2 が 10 個並ぶ円順列を考える．10 個の場所の 1 つに着目し，そこから時計回りに数字 1 または 2 を決めることにより円順列をつくる．このとき，1 または 2 の並び方は

$$2^{10} \text{ 通り}$$

あり，これらの起こり方は同様に確からしい．

そのうち，隣り合う 2 個の数字がすべて異なる並び方は最初の数のとり方で決まるから

$$2 \text{ 通り}$$

ある．

よって，求める確率は

$$\frac{2}{2^{10}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{512}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．