ジョーカーを除く1組のトランプ52枚から，1枚ずつカードを無作為に引き，引いたカードは戻さない．ただし，エースA，ジャックJ，クイーンQ，キングKはそれぞれ数字の1, 11, 12, 13とみなす．n番目$(n=1,\ 2)$に引いたカードの数字をa_nとし，そのカードのマークがスペードまたはクローバーのとき$r_n=a_n$，ハートまたはダイヤのとき$r_n=-a_n$とする．このとき，$z=r_1+r_2i$とする(ただしiは虚数単位である)．例えば，1枚目がハートの8，2枚目がクローバーの5の場合，$z=-8+5i$となる．

(1) 引いた2枚のカードが同じマークである確率を求めよ．
(2) $z=1+i$となる確率および$z=2+i$となる確率を求めよ．
(3) $|z|\leqq 5$となる確率を求めよ．
(4) zがとり得る値全体の集合をAとする．このとき$(1+i)z$が集合Aに属する確率を求めよ．

(26 札幌医大 3)

【答】

(1) $\dfrac{4}{17}$
(2) $\dfrac{1}{1326}$，$\dfrac{1}{663}$
(3) $\dfrac{19}{221}$
(4) $\dfrac{96}{221}$

【解答】

(1) 1組のトランプ52枚から，カードを順に2枚引く(引いたカードは戻さずに2枚引く)とき，カードの引き方は

$$52\cdot 51\ (\text{通り})$$

あり，これらの起こり方は同様に確からしい．
このうち，引いた2枚のカードが同じマークであるのは

1枚目はどのカードを引いてもよく，
2枚目は1枚目のカードと同じマークのカードを引く

ときである．この確率は

$$\frac{52\cdot 12}{52\cdot 51}=\mathbf{\frac{4}{17}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $z=1+i$となるのは

スペードのエースAとクローバーのエースAを引く

ときである．引く順序も考えると，この確率は

$$\frac{2\cdot 1}{52\cdot 51}=\mathbf{\frac{1}{1326}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$z=2+i$となるのは

1枚目はスペードまたはクローバーの数字2を引き，
2枚目はスペードまたはクローバーのエースAを引く

ときである．この確率は

$$\frac{2\cdot 2}{52\cdot 51}=\mathbf{\frac{1}{663}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

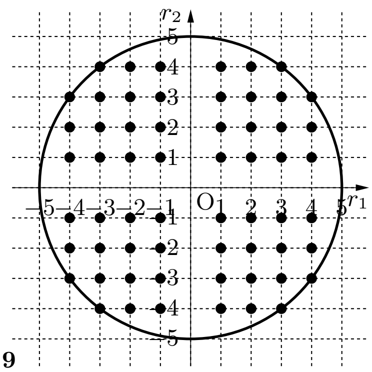
である．

(3) $|z| \leqq 5$ となる $z = r_1 + r_2 i$ (r_n ($n = 1,\ 2$) は $-13 \leqq r_n \leqq 13$ を満たす 0 でない整数) は右図の黒丸 60 個である．このうち

$$(r_1,\ r_2) = (\pm 1,\ \pm 1),\ (\pm 2,\ \pm 2),\ (\pm 3,\ \pm 3)$$

(すべて複号同順)

の 6 点についてはどの点になる確率も $\dfrac{1}{1326}$ であり，他の 54 個の点についてはどの点になる確率も $\dfrac{1}{663}$ である．



よって，求める確率は

$$6 \cdot \frac{1}{1326} + 54 \cdot \frac{1}{663} = \frac{1}{221} + \frac{18}{221} = \mathbf{\frac{19}{221}}$$

……(答)

である．

(4) A は z がとり得る値全体の集合であり

$$A = \{ r_1 + r_2 i \,|\, r_n\ (n = 1,\ 2) \text{ は } -13 \leqq r_n \leqq 13 \text{ を満たす 0 でない整数 } \}$$

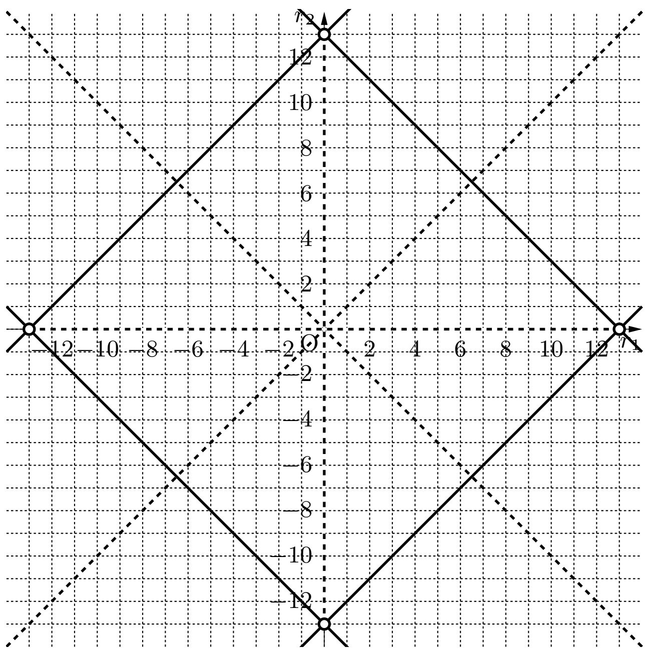
である．

$$(1+i)z = (1+i)(r_1 + r_2 i) = (r_1 - r_2) + (r_1 + r_2)i$$

であるから，$(1+i)z$ が集合 A に属する条件は

$$\begin{cases} -13 \leqq r_1 - r_2 \leqq 13 \text{ かつ } r_1 - r_2 \neq 0 \\ -13 \leqq r_1 + r_2 \leqq 13 \text{ かつ } r_1 + r_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r_1 - 13 \leqq r_2 \leqq r_1 + 13 \text{ かつ } r_2 \neq r_1 \\ -r_1 - 13 \leqq r_2 \leqq -r_1 + 13 \text{ かつ } r_2 \neq -r_1 \end{cases}$$



であり，この条件を満たす整数の組 $(r_1,\ r_2)$ は

$$(12 + 11 + \cdots + 2 + 1) \times 4 - 6 \times 4 = \frac{12 \cdot 13}{2} \times 4 - 6 \times 4 = (78 - 6) \times 4 = 288 \text{ (個)}$$

ある．どの点になる確率も $\dfrac{1}{663}$ であるから，求める確率は

$$288 \cdot \frac{1}{663} = \mathbf{\frac{96}{221}}$$

……(答)

である．