座標平面において，x 座標も y 座標も整数である点全体の集合上を移動する点 P がある．時刻 0 に点 P は原点 O にある．0 以上の整数 t に対し，時刻 t に点 P が点 $(m,\ n)$ にあるとき，時刻 $t+1$ での点 P の位置は 4 点

$$(m+1,\ n),\quad (m-1,\ n),\quad (m,\ n+1),\quad (m,\ n-1)$$

のいずれかであり，また，どの位置にある確率も $\dfrac{1}{4}$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 8 に点 P が点 $(4,\ 0)$ にある確率を求めよ．
(2) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にある確率を求めよ．
(3) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にあるとき，時刻 1，時刻 2，$\cdots$，時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4,\ 2)$ にある条件付き確率を求めよ．

(26 東北大 理系 4)

【答】

(1) $\dfrac{49}{4096}$

(2) $\dfrac{7}{256}$

(3) $\dfrac{45}{1792}$

【解答】

時刻が 1 経過するときの P の変位は

$$(1,\ 0),\ (-1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1)$$

であり，それぞれの変位の回数を

$$r,\ l,\ u,\ d$$

で表す．

(1) 時刻 8 に点 P が点 $(4,\ 0)$ にあるのは，0 以上の整数 $r,\ l,\ u,\ d$ が

$$\begin{cases} r+l+u+d=8 \\ r-l=4 \\ u-d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} l=r-4 \\ d=u \\ r+(r-4)+u+u=8 \end{cases} \iff \begin{cases} l=r-4 \\ d=u \\ r+u=6 \end{cases}$$

を満たすときである．第 1 式から $r \geqq 4$ であり，第 3 式もあわせると

$$(r,\ u)=(4,\ 2),\ (5,\ 1),\ (6,\ 0)$$

である．このとき

$$(r,\ l,\ u,\ d)=(4,\ 0,\ 2,\ 2),\ (5,\ 1,\ 1,\ 1),\ (6,\ 2,\ 0,\ 0)$$

であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} &\frac{8!}{4!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{8!}{5!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}+\frac{8!}{6!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &=\frac{2\cdot 7\cdot 6\cdot 5+8\cdot 7\cdot 6+4\cdot 7}{4^8} \\ &=\frac{(15+12+1)\cdot 7}{4^7}=\frac{49}{4^6} \\ &=\boldsymbol{\frac{49}{4096}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(2) 点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にあるのは，整数 $x,\ y$ が

$$(x+y)(x-y)=16$$

を満たすときである．$x+y,\ x-y$ は同符号であり，かつ $(x+y)+(x-y)=2x$ (= 偶数) より $x+y,\ x-y$ の偶奇が一致するときである．

$x+y$	± 2	± 4	± 8
$x-y$	± 8	± 4	± 2

$\therefore$

x	± 5	± 4	± 5
y	∓ 3	0	± 3

(以上，複号同順)

$$(x,\ y)=(\pm 4,\ 0),\ (5,\ \pm 3),\ (-5,\ \pm 3)$$

の 6 点である．

時刻 8 に P が点 $(4,\ 0)$ にある確率は (1) で計算済みで $\dfrac{49}{4^6}$ あり，時刻 8 に P が点 $(-4,\ 0)$ にある確率は (1) での $r,\ l$ を入れ換えればよく $\dfrac{49}{4^6}$ ある．

時刻 8 に P が点 $(5,\ 3)$ にあるのは，0 以上の整数 $r,\ l,\ u,\ d$ が

$$\begin{cases} r+l+u+d=8 \\ r-l=5 \\ u-d=3 \end{cases} \iff \begin{cases} l=r-5 \\ d=u-3 \\ r+(r-5)+u+(u-3)=8 \end{cases} \iff \begin{cases} l=r-5 \\ d=u-3 \\ r+u=8 \end{cases}$$

を満たすときである．第 1 式，第 2 式より $r \geqq 5,\ u \geqq 3$ であり，第 3 式もあわせると

$$(r,\ u)=(5,\ 3)$$

である．このとき

$$(r,\ l,\ u,\ d)=(5,\ 0,\ 3,\ 0)$$

であり，この確率は

$$\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{8\cdot 7}{4^8}=\frac{14}{4^7}$$

である．時刻 8 に P が点 $(5,\ -3),\ (-5,\ \pm 3)$ にある確率も $\dfrac{14}{4^7}$ である，

よって，求める確率は

$$2\times\frac{49}{4^6}+4\times\frac{14}{4^7}=\frac{98+14}{4^6}=\frac{4^2\cdot 7}{4^6}=\mathbf{\frac{7}{256}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 時刻 1，時刻 2，$\cdots$，時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4,\ 2)$ にあるのは時刻 6 のときに限られる．このとき

$$(r,\ l,\ u,\ d)=(4,\ 0,\ 2,\ 0)$$

であり，さらに，時刻 8 で点 P が双曲線 $x^2-y^2=16$ 上にあるのは，点 P が点 $(4,\ 0)$ または $(5,\ 3)$ に限られる．このときの $(r,\ l,\ u,\ d)$ は

$(4,\ 0,\ 2,\ 0)$ の後に d が 2 回　または　$(4,\ 0,\ 2,\ 0)$ の後に r が 1 回, u が 1 回

のときである．

$$\begin{aligned} &\frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\frac{1}{4} \\ &=\frac{15}{4^8}+\frac{15\cdot 2}{4^8}=\frac{45}{4^8} \end{aligned}$$

である．

求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{45}{4^8}}{\dfrac{7}{4^4}}=\frac{45}{7\cdot 4^4}=\mathbf{\frac{45}{1792}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．