1 人対 1 人で対戦する競技の大会があり，A，B，C の 3 人，または A，B，C，D の 4 人で開催される．大会はリーグ戦形式で行われる．すなわち，それぞれの人が他のすべての人と 1 回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，A が対戦相手に勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であり，A 以外の 2 人が対戦するとき勝つ確率はどちらも $\frac{1}{2}$ であるものとする．なお，各対戦の結果は互いに影響を与えないものとする．

すべての対戦が終わった後，次の**優勝者の決め方**により優勝者を 1 人決める．

優勝者の決め方

勝ち数が一番多い人が 1 人であれば，その人を優勝者とする．そうでなければ，抽選により，勝ち数が一番多い人の中から 1 人を選び，その人を優勝者とする．ただし，勝ち数が一番多い人の人数が n 人であるとき，それぞれの人が選ばれる確率は $\frac{1}{n}$ であるものとする．

A が優勝する確率を，A，B，C の 3 人でリーグ戦を行うときと，A，B，C，D の 4 人でリーグ戦を行うときとで比較しよう．

以下では，すべての対戦の勝敗を**対戦結果**と呼ぶ．なお，**対戦結果**は抽選の結果を含まない．**対戦結果**を示すために表を用いる．例えば，表 1 は 4 人でリーグ戦を行ったときの**対戦結果**の一つを示す．A から始まる行の × ○○は，A が B に負け C と D に勝ち，2 勝 1 敗となったことを示す．また，勝ち数が一番多い A と B の 2 人が抽選の対象であり，そのことを ✓ で示す．

表　1

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	✓
B	○		○	×	2	1	✓
C	×	×		○	1	2	−
D	×	○	×		1	2	−

(1) A，B，C の 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える．

(i) A が 2 勝 0 敗ならば，A が優勝する．A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(ii) A が 1 勝 1 敗で優勝するためには，B も C も 1 勝 1 敗であることが必要である．例えば，A が勝つ相手が B であるとき，A が C に負け B が C に勝つことが必要である．表 2 は，この**対戦結果**を示し，この**対戦結果**になる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．この**対戦結果**になり，かつ A が抽選により優勝者に選ばれる確率は $\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \times \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

表　2

	A	B	C	勝ち数	負け数	抽選
A		○	×	1	1	✓
B	×		○	1	1	✓
C	○	×		1	1	✓

A が勝つ相手は B，C の 2 通りあることに注意すると、A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ であることがわかる．

(i) と (ii) から，A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} + \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

(2) A，B，C，D の 4 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率を考える．

A が 3 勝 0 敗ならば，A が優勝する．また，A が 1 勝 2 敗ならば，2 勝以上する人がいるため A は優勝しない．

A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を，全敗する人がいる場合の確率と全敗する人がいない場合の確率の和として求める．

(i) 全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める．

全敗する人は B，C，D の 3 通りある．例えば，D が全敗するとき，対戦結果の一部を示すと表 3 のようになる．

表　3

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A				○			
B				○			
C				○			
D	×	×	×		0	3	–

D が全敗する確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．D が全敗する場合，A が 2 勝 1 敗で優勝するためには，A が D 以外の 2 人との対戦で 1 勝 1 敗となることが必要である．

以上のことから，(1) の (ii) の結果を用い，全敗する人が B，C，D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ であることがわかる．

(ii) 全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める．

A が 2 勝 1 敗のとき，A が負ける相手は B，C，D の 3 通りある．例えば，A が負ける相手が B であるとき，対戦結果の一部を示すと表 4 のようになる．

表　4

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	
B	○						
C	×						
D	×						

このとき，A が優勝するためには，B は 2 勝 1 敗か 1 勝 2 敗であることが必要である．例えば，表 1 は，A と B が 2 勝 1 敗である対戦結果の一つを示し，A と B の 2 人が抽選の対象となったことを示す．

表 1(再掲)

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	✓
B	○		○	×	2	1	✓
C	×	×		○	1	2	–
D	×	○	×		1	2	–

全敗する人がいない場合で，かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの対戦結果は $\boxed{\text{ソ}}$ 通りある．A が負ける相手が B，C，D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることがわかる．

(i) と (ii) から，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}} + \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

以上のことから，A が 3 勝 0 敗で優勝する確率を考慮すると，A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であることがわかる．この確率は (1) で求めた 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率より $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ だけ $\boxed{\text{ヌ}}$．

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ 小さい	① 大きい

(26 共通テスト 本試験 I・A 4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コ	サ	シ	スセ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナニ	ヌ
4	9	1	9	1	3	2	27	1	6	1	27	4	1	9	4	9	2	27	0

【解答】

(1) (i) A が 2 勝 0 敗で優勝する確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) A が B に勝ち C に負け，さらに B が C に勝つ確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．この対戦結果になり，かつ A が抽選により優勝者に選ばれる確率は

$$\frac{1}{9}\times\mathbf{\frac{1}{3}}\left(=\frac{1}{27}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

A が勝つ相手は B，C の 2 通りあることに注意する．A が C に勝つときも A が優勝する確率は上と同じく $\frac{1}{27}$ であるから，A が 1 勝 1 敗で優勝する確率は

$$2\times\frac{1}{27}=\mathbf{\frac{2}{27}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．

(i) と (ii) から，A が優勝する確率は

$$\frac{4}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$$

である．

(2) A が優勝するのは

(I) A が 3 勝 0 敗
(II) A が 2 勝 1 敗

のいずれかのときである．

(I) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

である．

(II) A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を

(i) 全敗する人がいる場合
(ii) 全敗する人がいない場合

にわけて求める．

(i) 全敗する人は B，C，D の 3 通りがある．

D が全敗する確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．D が全敗する場合，A が 2 勝 1 敗で優勝するのは，A が B，C との対戦で 1 勝 1 敗となり抽選で選ばれることである．その確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{27}=\frac{1}{81} \quad (\because ①)$$

全敗する人が B，C，D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいる場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$3\times\frac{1}{81}=\mathbf{\frac{1}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．

(ii) 全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率を求める．

A が 2 勝 1 敗のとき，A が負ける相手は B，C，D の 3 通りある．例えば，A が負ける相手が B であるとき，対戦結果の一部が問題文に表 4 として与えられている．この表 4 を完成させる．

全勝する人も全敗する人もいないことに注意すると B と C，D の対戦は

(B ○，C×) のとき，(B×，D ○) …… (a)

(B×，C ○) のとき，(B ○，D×) …… (b) または (B×，D ○) …… (c)

表 4(a)

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	✓
B	○		○	×	2	1	✓
C	×	×					
D	×	○					

残り C と D の対戦は (C ○，D×) と 1 通りに決まる．

表 4(b)

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	✓
B	○		×	○	2	1	✓
C	×	○					
D	×	×					

残り C と D の対戦は (C×，D ○) と 1 通りに決まる．

表 4(c)

	A	B	C	D	勝ち数	負け数	抽選
A		×	○	○	2	1	
B	○		×	×	1	2	
C	×	○					
D	×	○					

残り C と D の対戦は (C ○，D×) または (C×，D ○) と 2 通りがある．

よって，全敗する人がいない場合で，かつ A が B に負け C と D に勝ち優勝するときの対戦結果は

$$1 + 1 + 2 = \mathbf{4}\ \text{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

あり，それぞれの対戦結果となる確率はどれも $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ である．このとき抽選は 2 人で行われるから，A が B に負けて 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\times\left(4\times\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{27}$$

である．

A が負ける相手が B，C，D の 3 通りあることに注意すると，全敗する人がいない場合で，かつ A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$3\times\frac{1}{27} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．

(i) と (ii) から，A が 2 勝 1 敗で優勝する確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

である．

以上のことから，A が 3 勝 0 敗で優勝する確率を考慮すると，A が優勝する確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{12}{27}=\boldsymbol{\frac{4}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であることがわかる．この確率は (1) で求めた 3 人でリーグ戦を行うときに A が優勝する確率より

$$\frac{14}{27}-\frac{12}{27}=\boldsymbol{\frac{2}{27}}$$ だけ 小さい． 0 ……(答)