1 個のさいころを投げる試行を繰り返す．最初の持ち点は 1 とし，3 の目が出たときは持ち点を 3 倍，5 の目が出たときは持ち点を 5 倍，3 と 5 以外の目が出たときは持ち点を 2 倍する．たとえば 3 回試行して出た目が順番に 6, 3, 5 のとき，持ち点は $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 5 = 30$ と変化し，最後の持ち点は 30 である．次の問いに答えよ．

(1) 3 回試行したとき，最後の持ち点が 4 の倍数となる確率を求めよ．

(2) 4 回試行したとき，最後の持ち点が平方数となる確率を求めよ．ただし，平方数とは，ある自然数の 2 乗となる数のことであり，たとえば 4, 9, 16 は平方数である．

(26 北海道大 文系 4)

【答】

(1) $\dfrac{20}{27}$

(2) $\dfrac{19}{54}$

【解答】

(1) 3 回試行したとき，最後の持ち点が 4 の倍数となるのは 3 回のうち少なくとも 2 回 3 と 5 以外の目が出るときである．

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \frac{2}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{3 \cdot 4 + 8}{3^3} = \boldsymbol{\frac{20}{27}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

- 余事象を考えると，求める確率は

$$ 1 - \left\{ \left(\frac{2}{6}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \frac{4}{6} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \right\} = 1 - \frac{1 + 3 \cdot 2}{3^3} = \frac{20}{27} $$

  である．

(2) 4 回試行したとき，最後の持ち点が平方数となるのは，3 の目が出る回数を a，5 の目が出る回数を b，3，5 以外の目が出る回数を c $(a + b + c = 4)$ とおくと

$$ \begin{aligned} (a,\ b,\ c) =& (4,\ 0,\ 0),\ (0,\ 4,\ 0),\ (0,\ 0,\ 4), \\ & (2,\ 2,\ 0),\ (2,\ 0,\ 2),\ (0,\ 2,\ 2) \end{aligned} $$

のいずれかである．求める確率は

$$ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 + {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 + {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \\ =& \frac{1 + 1 + 256}{6^4} + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1 + 16 + 16}{6^4} \\ =& \frac{43}{6^3} + \frac{33}{6^3} \\ =& \frac{76}{6^3} \\ =& \boldsymbol{\frac{19}{54}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned} $$

である．