n を 3 以上の自然数とする．n 人がじゃんけんを 1 回する．このとき，勝つ人数の期待値を E_n とする．ただし，だれも勝たないときは，勝つ人数は 0 人とする．以下の問いに答えよ．

(1) $n=5$ のとき，1 人が勝つ確率を求めよ．
(2) $n=5$ のとき，2 人が勝つ確率を求めよ．
(3) $n=5$ のとき，だれも勝たない確率を求めよ．
(4) 期待値 E_5 を求めよ．
(5) 等式 $2^{n-1}-1=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が成り立つことを証明せよ．
(6) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n$ を求めよ．必要ならば，以下の (i)，(ii) が成り立つことを用いてもよい．

(i) $k\times{}_n\mathrm{C}_k=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ ただし，$1\leqq k\leqq n$
(ii) $r>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r^n}=0$

(26 豊橋技科大 4)

【答】

(1) $\dfrac{5}{81}$
(2) $\dfrac{10}{81}$
(3) $\dfrac{17}{27}$
(4) $E_5=\dfrac{25}{27}$
(5) 略
(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n=0$

【解答】

(1) 5 人がじゃんけんを 1 回するとき，手の出方は 3^5 通りあり，これらは同様に確からしい．
「だれ」が「どの手」で勝つかと考えると，1 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\mathbf{\frac{5}{81}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) と同じく考えると，2 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\frac{10\cdot3}{3^5}=\mathbf{\frac{10}{81}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 余事象を考える．
3 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\frac{10}{81}$$

4 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^5}=\frac{5}{81}$$

であるから，だれも勝たない確率は

$$1-\left(\frac{5}{81}+\frac{10}{81}+\frac{10}{81}+\frac{5}{81}\right)=1-\frac{30}{81}=1-\frac{10}{27}=\mathbf{\frac{17}{27}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 勝者が決まるのは 2 種類の手が出る場合であり，その総数は「2 種類の手」を決め，5 人がそれぞれどちらの手を出すかで決まる．ただし，5 人がすべて同じ手になるときの 2 通りは除くから

$${}_3\mathrm{C}_2 \times (2^5 - 2) = 3 \cdot 30 \text{ (通り)}$$

ある．よって，だれも勝たない確率は

$$1 - \frac{3 \cdot 30}{3^5} = 1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$$

である．

(4) 5 人がじゃんけんを 1 回するときの勝つ人数の期待値 E_5 は

$$\begin{aligned} E_5 &= 0 \cdot \frac{17}{27} + 1 \cdot \frac{5}{81} + 2 \cdot \frac{10}{81} + 3 \cdot \frac{10}{81} + 4 \cdot \frac{5}{81} \\ &= \frac{0+5+20+30+20}{81} \\ &= \frac{75}{81} \\ &= \boldsymbol{\frac{25}{27}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

(5) $n \geqq 3$ のとき，二項定理 $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k a^k b^{n-1-k}$ において，$a = b = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} (1+1)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k\right) + 1 \\ \therefore \quad 2^{n-1} - 1 &= \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．

(6) n 人がじゃんけんをして k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^n} = \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}}$$

であるから

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n \cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}}{3^{n-1}} \quad (\because \text{ (i)}) \\ &= \frac{n}{3^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \\ &= \frac{n}{3^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \\ &= \frac{n}{3^{n-1}} (2^{n-1} - 1) \quad (\because \text{ (5)}) \\ &= \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} - \frac{n}{3^{n-1}} \\ &\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0 \quad (\because \text{ (ii)}) \\ \therefore \quad & \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} E_n = 0} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．