以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 4 ページの正規分布表を用いてもよい．

ある自治体では，地域の知識を問う資格試験 (以下，資格試験) を毎年実施しており，200 点満点のうち 120 点以上である受験者を合格としている．

(1) 今年実施した資格試験 (以下，今年の資格試験) における受験者全体の得点の平均は 116 点，標準偏差は 25 点であることが公表された．今年の資格試験の受験者の得点は正規分布に従うとし，得点を表す確率変数を $X$ とする．このとき，$X$ は正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから，$Y = \boxed{ア}$ とおくと，$Y$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

したがって，今年の受験者全体のうち，120 点以上である受験者の割合 $P(X \geqq 120)$ はおよそ $\boxed{イ}$ である．

$\boxed{ア}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{X-116}{5}$ | ① $\dfrac{X-116}{25}$ | ② $\dfrac{X-116}{25^2}$ |
| ③ $\dfrac{X-120}{5}$ | ④ $\dfrac{X-120}{25}$ | ⑤ $\dfrac{X-120}{25^2}$ |

$\boxed{イ}$ については，最も適当なものを，次の⓪〜⑦のうちから一つ選べ．

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 0.16 | ① 0.21 | ② 0.29 | ③ 0.34 |
| ④ 0.41 | ⑤ 0.44 | ⑥ 0.50 | ⑦ 0.84 |

(2) この自治体の A 地域では，多くの住民がこの資格試験を受験し，過去 10 年間における合格率が毎年 40 % (0.4) を超えていた．太郎さんたちは，今年の資格試験の合格率についても 0.4 より高いと判断してよいかを調べるために，A 地域における住民の受験者の中から $n$ 人を無作為に選び，その合否を調査することにした．

(i) A 地域における住民の今年の資格試験 (以下，A 地域における今年の資格試験) の受験者全体を母集団とし，母集団の大きさは十分に大きいとする．そして，A 地域における今年の資格試験の合格率を $p$ とする．無作為に選ぶ $n$ 人のうち $i$ 番目の受験者が合格している場合は 1，合格していない場合は 0 の値をとる確率変数を $W_i$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ と定義する．このとき，$W_i$ の確率分布は表 1 のとおりである．

表　1

| $W_i$ | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| 確　率 | $1-p$ | $p$ | 1 |

表 1 から，$W_i$ の平均 (期待値)$E(W_i)$ は $\boxed{ウ}$ となる．

また，$W_i$ の分散 $V(W_i)$ について

$$V(W_i) = \{0 - E(W_i)\}^2(1-p) + \{1 - E(W_i)\}^2 p$$

から，$V(W_i)$ は $\boxed{\text{エ}}$ となる．

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $p$ | ① $1-p$ | ② $p^2$ |
| ③ $p(1-p)$ | ④ $p^2(1-p)^2$ | ⑤ $p^3+(1-p)^3$ |

(ii) (i) の $W_1$, $W_2$, $\cdots$, $W_n$ を，表 1 の確率分布をもつ母集団から抽出した大きさ $n$ の無作為標本とみなす．このとき，標本平均を $\overline{W} = \dfrac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n}$ とおくと，$n$ が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ に従う．

この $\overline{W}$ の確率分布を利用して，$p$ が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5 % (0.05) で仮説検定を行い検証したい．ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする．このとき，帰無仮説は「$p = 0.4$」，対立仮説は「$p > 0.4$」である．これらの仮説に対して，有意水準 5 %で帰無仮説が棄却 (否定) されるかどうかを判断する．

無作為に選ばれた 400 人のうち，184 人が合格者であった．いま，帰無仮説が正しいと仮定する．標本の大きさ $n = 400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\boxed{\text{カ}}$ の正規分布に従う．

$\sqrt{6} = 2.45$ として用いると

$$P\left(\overline{W} \geqq \frac{184}{400}\right) = P(\overline{W} \geqq 0.46)$$

の値は $\boxed{\text{キ}}$ となる．よって，この値をパーセント表示した値は有意水準 5 %より $\boxed{\text{ク}}$．したがって，有意水準 5 %で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より $\boxed{\text{ケ}}$．

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $p$ | ① $1-p$ | ② $p(1-p)$ | ③ $\dfrac{p}{\sqrt{n}}$ |
| ④ $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ | ⑤ $\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{n}}$ | ⑥ $\dfrac{\sqrt{1-p}}{n}$ | ⑦ $\dfrac{p(1-p)}{n}$ |

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ⓪ $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ | ① $\dfrac{6}{25}$ | ② $\dfrac{\sqrt{6}}{100}$ | ③ $\dfrac{3}{250}$ | ④ $\dfrac{3}{500}$ | ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{2000}$ |

$\boxed{キ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つ選べ．

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ 0.0046 | ① 0.0062 | ② 0.0071 | ③ 0.0987 |
| ④ 0.1112 | ⑤ 0.3888 | ⑥ 0.4013 | ⑦ 0.4929 |

$\boxed{ク}$ の解答群

⓪ 小さいから，帰無仮説は棄却されない
① 小さいから，帰無仮説は棄却される
② 大きいから，帰無仮説は棄却されない
③ 大きいから，帰無仮説は棄却される

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ 高いと判断できる　　① 高いとは判断できない

(3) 太郎さんと花子さんは，(2) の仮説検定の結果について話している．

太郎：無作為に選ばれた 100 人のうち 46 人が合格者でも，比率は同じ 0.46 になるから，仮説検定の結果は同じになるのかな．
花子：試しに計算して調べてみようよ．

A 地域における今年の資格試験の受験者の中から無作為に選ばれた 100 人のうち，46 人が合格者である場合について考える．

(2) の (ii) と同じ帰無仮説と対立仮説に対し，有意水準 5％で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる．標本の大きさ $n = 100$ は十分に大きいから，(2) の (ii) と同様に，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \boxed{オ}\right)$ に従う．帰無仮説が正しいと仮定する．このとき，$\sqrt{6} = 2.45$ として用いると

$$P\left(\overline{W} \geqq \frac{46}{100}\right) = P(\overline{W} \geqq 0.46)$$

の値をパーセント表示した値は有意水準 5％より $\boxed{コ}$．

したがって，有意水準 5％で帰無仮説は $\boxed{サ}$．

$\boxed{コ}$ の解答群

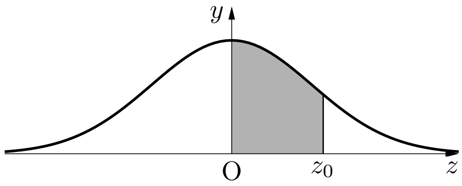
⓪ 小さい　　① 大きい

$\boxed{サ}$ の解答群

⓪ 棄却される　　① 棄却されない

# 正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである．




| $z_0$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 5 問)

【答】

| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | サ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 0 | 3 | 7 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |

【解答】

(1) 得点を表す確率変数 $X$ の平均は 116 点，標準偏差は 25 点である．$X$ は正規分布 $N(116,\ 25^2)$ に従うから

$$Y = \boldsymbol{\frac{X-116}{25}} \quad ①$$
……(答)

とおくと，$Y$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．したがって

$$\begin{aligned} P(X \geqq 120) &= P\left(\frac{X-116}{25} \geqq \frac{120-116}{25}\right) \\ &= P(Y \geqq 0.16) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Y \leqq 0.16) \\ &= 0.5 - 0.0636 \quad (\because\ \text{正規分布表}) \\ &= 0.4364 \end{aligned}$$

であり，およそ **0.44** である．⑤ ……(答)

(2) (i) 表から，$W_i$ の平均 (期待値)$E(W_i)$ は

| $W_i$ | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| 確　率 | $1-p$ | $p$ | 1 |

$$\begin{aligned} E(W_i) &= 0\cdot(1-p) + 1\cdot p \\ &= \boldsymbol{p} \quad ⓪ \end{aligned}$$
……(答)

となる．また，$W_i$ の分散 $V(W_i)$ は

$$\begin{aligned} V(W_i) &= \{0 - E(W_i)\}^2(1-p) + \{1 - E(W_i)\}^2 p \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= (p^2 - p^3) + (p - 2p^2 + p^3) \\ &= p - p^2 \\ &= \boldsymbol{p(1-p)} \quad ③ \end{aligned}$$
……(答)

となる．

- 分散の公式を用いて計算してもよい．

$$\begin{aligned} V(W_i) &= E({W_i}^2) - \{E(W_i)\}^2 \\ &= \{0^2(1-p) + 1^2 p\} - p^2 \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

となる．

(ii) 標本平均 $\overline{W} = \dfrac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n}$ について

$$\text{平均 } E(\overline{W}) = \frac{E(W_1) + E(W_2) + \cdots + E(W_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

$$\text{分散 } V(\overline{W}) = \frac{V(W_1) + V(W_2) + \cdots + V(W_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

であり，$n$ が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は

近似的に正規分布 $N\left(p,\ \boldsymbol{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ に従う．⑦ ……(答)

帰無仮説「$p = 0.4$」を有意水準 5%で検定する．

標本の大きさ $n = 400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に

平均 : 0.4

標準偏差 : $\sqrt{\dfrac{0.4(1-0.4)}{400}} = \sqrt{\dfrac{0.06}{100}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\mathbf{100}}$ ② ……(答)

の正規分布に従うから，$Z = \dfrac{\overline{W} - 0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{100}}$ とおくと，$Z$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$\sqrt{6} = 2.45$ として用いると

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{W} \geqq \frac{184}{400}\right) &= P(\overline{W} \geqq 0.46) = P\left(Z \geqq \frac{0.46-0.4}{\dfrac{\sqrt{6}}{100}}\right) \\
&= P(Z \geqq \sqrt{6}) \\
&= P(Z \geqq 2.45) \\
&= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2.45) \\
&= 0.5 - 0.4929 \quad (\because \text{ 正規分布表}) \\
&= \mathbf{0.0071} \quad ②
\end{aligned}
$$
……(答)

となる．この値 0.0071 をパーセント表示した値 0.71 %は有意水準 5 % より小さいから、帰無仮説は棄却される． ① ……(答)

したがって，有意水準 5 %で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より高いと判断できる． ⓪ ……(答)

(3) 標本の大きさ $n = 100$ は十分に大きいから，(2) の (ii) と同様に，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$，すなわち $N\left(0.4,\ \dfrac{0.4(1-0.4)}{100}\right)$ に従う．

標準偏差 : $\sqrt{\dfrac{0.4(1-0.4)}{100}} = \sqrt{\dfrac{0.24}{100}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{100}$

より，$Z = \dfrac{\overline{W} - 0.4}{\dfrac{2\sqrt{6}}{100}}$ とおくと，$Z$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

帰無仮説が正しいと仮定する．

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{W} \geqq \frac{46}{100}\right) &= P(\overline{W} \geqq 0.46) = P\left(Z \geqq \frac{0.46-0.4}{\dfrac{2\sqrt{6}}{100}}\right) = P\left(Z \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\
&= P\left(Z \geqq \frac{2.45}{2}\right) \quad (\because\ \sqrt{6} = 2.45 \text{ とした}) \\
&= P(Z \geqq 1.225) \\
&= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.225) \\
&> 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.23) \\
&= 0.5 - 0.3907 \quad (\because \text{ 正規分布表}) \\
&= 0.1093
\end{aligned}
$$

この値 0.1093 をパーセント表示した値 10.93 %は有意水準 5 % より大きい． ① ……(答)

したがって，有意水準 5% で帰無仮説「$p = 0.4$」は棄却されない． ① ……(答)