変量 $x$, $y$ の値の組のデータ

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{20},\ y_{20})$$

をデータ $W$ と呼ぶことにする．$x$, $y$ の平均値をそれぞれ $\overline{x}$, $\overline{y}$ とし，分散をそれぞれ ${s_x}^2$, ${s_y}^2$ とする．また，$x$ と $y$ の共分散と相関係数をそれぞれ $s_{xy}$, $r_{xy}$ とする．さらに，データ $W$ の $x$ と $y$ との積で得られるデータの値

$$x_1 \times y_1,\ x_2 \times y_2,\ \cdots,\ x_{20} \times y_{20}$$

をそれぞれ，変量 $u$ を用いて

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{20}$$

とおき，$u$ の平均値を $\overline{u}$ とする．以下では，$\overline{x} = \overline{y} = 0$, ${s_x}^2 = {s_y}^2 = 1$, $r_{xy} > 0$ の場合を考える．

(1) $s_{xy} = \boxed{\boxed{\text{ク}}}$ であり，このことから，$r_{xy} = \boxed{\boxed{\text{ク}}}$ であることがわかる．

$\boxed{\boxed{\text{ク}}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $0$ | ① $-2$ | ② $2$ |
| ③ $\overline{u}$ | ④ $\overline{u} - 2$ | ⑤ $\overline{u} + 2$ |
| ⑥ $\dfrac{1}{2}\overline{u}$ | ⑦ $\dfrac{1}{3}\overline{u}$ | ⑧ $\dfrac{1}{4}\overline{u}$ |

(2) データ $W$ の $x$ と $y$ との和を 2 で割った数で得られるデータの値

$$\frac{x_1 + y_1}{2},\ \frac{x_2 + y_2}{2},\ \cdots,\ \frac{x_{20} + y_{20}}{2}$$

をそれぞれ，変量 $z$ を用いて

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{20}$$

とおく．$z$ の平均値と分散をそれぞれ $\overline{z}$, ${s_z}^2$ とすると，$\overline{z} = 0$ であるため，

${s_z}^2 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}} + \overline{u}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．このことから，$x$ と $z$ の相関係数を $r_{xz}$ とすると，

$r_{xz} = \sqrt{\dfrac{\boxed{\text{ケ}} + \overline{u}}{\boxed{\text{コ}}}}$ となり，(1) から，$r_{xz} \geqq r_{xy}$ であることがわかる．

(26 共通テスト 本試験 I 第 4 問〔2〕)

【答】

| ク | ケ | コ |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 |

【解答】

(1) $\overline{x} = \overline{y} = 0$ より，$x$ と $y$ の共分散 $s_{xy}$ は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{20}\{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + \cdots + (x_{20} - \overline{x})(y_{20} - \overline{y})\} \\ &= \frac{1}{20}(x_1y_1 + x_1y_1 + \cdots + x_{20}y_{20}) \\ &= \frac{1}{20}(u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}) \\ &= \boldsymbol{\overline{u}} \qquad ③ \end{aligned}$$

……(答)

である．このことと $s_x{}^2 = s_y{}^2 = 1$ であることから，$x$ と $y$ の相関係数 $r_{xy}$ は

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\overline{u}}{1 \cdot 1} = \overline{u}$$

であることがわかる．

(2) $z$ の平均値 $\overline{z}$ は

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{20}(z_1 + z_2 + \cdots + z_{20}) \\
&= \frac{1}{20}\left(\frac{x_1+y_1}{2} + \frac{x_2+y_2}{2} + \cdots + \frac{x_{20}+y_{20}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{20}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}{2} + \frac{y_1+y_2+\cdots+y_{20}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}}{20} + \frac{y_1+y_2+\cdots+y_{20}}{20}\right) \\
&= \frac{\overline{x}+\overline{y}}{2} \qquad \left(\text{数学 B で} \overline{\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{\overline{x}+\overline{y}}{2} \text{を学ぶ}\right)
\end{aligned}$$

$\overline{x} = \overline{y} = 0$ であるから

$$\overline{z} = \frac{0+0}{2} = 0$$

である．$z$ の分散 $s_z{}^2$ は

$$\begin{aligned}
s_z{}^2 &= \frac{1}{20}\{(z_1-\overline{z})^2 + (z_2-\overline{z})^2 + \cdots + (z_{20}-\overline{z})^2\} \\
&= \frac{1}{20}(z_1{}^2 + z_2{}^2 + \cdots + z_{20}{}^2) \qquad (\because\ \overline{z} = 0) \\
&= \frac{1}{20}\left\{\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_{20}+y_{20}}{2}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{20}\left\{\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{20}{}^2}{4} + \frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{20}y_{20}}{2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_{20}{}^2}{4}\right\}
\end{aligned}$$

ここで，$\overline{x} = 0$，$s_x{}^2 = 1$ より

$$\begin{aligned}
s_x{}^2 &= \frac{1}{20}\{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_{20}-\overline{x})^2\} \\
1 &= \frac{1}{20}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{20}{}^2)
\end{aligned}$$

同じく，$\overline{y} = 0$，$s_x{}^2 = 1$ より

$$\frac{1}{20}(y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_{20}{}^2) = 1$$

また

$$\frac{1}{20}(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{20}y_{20}) = \overline{u}$$

であるから

$$s_z{}^2 = \frac{1}{4} + \frac{\overline{u}}{2} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1+\overline{u}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．さらに

$$\begin{aligned}
s_{xz} &= \frac{1}{20}\left\{(x_1-\overline{x})\left(\frac{x_1+y_1}{2} - \overline{z}\right) + (x_2-\overline{x})\left(\frac{x_2+y_2}{2} - \overline{z}\right) + \cdots\right. \\
&\qquad \left. \cdots + (x_{20}-\overline{x})\left(\frac{x_{20}+y_{20}}{2} - \overline{z}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{20}\left(x_1 \cdot \frac{x_1+y_1}{2} + x_2 \cdot \frac{x_2+y_2}{2} + \cdots + x_{20} \cdot \frac{x_{20}+y_{20}}{2}\right) \qquad (\because\ \overline{x} = \overline{z} = 0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{20}{}^2}{20} + \frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_{20}y_{20}}{20}\right) \\
&= \frac{1}{2}(s_x{}^2 + \overline{u}) \\
&= \frac{1+\overline{u}}{2} \qquad (\because\ s_x{}^2 = 1)
\end{aligned}$$

このことから $x$ と $z$ の相関係数 $r_{xz}$ は

$$r_{xz} = \frac{s_{xz}}{s_x s_z} = \frac{\dfrac{1+\overline{u}}{2}}{1 \cdot \sqrt{\dfrac{1+\overline{u}}{2}}} = \sqrt{\frac{1+\overline{u}}{2}}$$

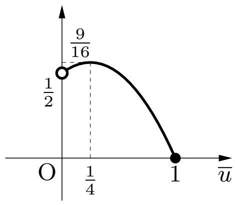
となる．

相関係数は $-1 \leqq$ (相関係数) $\leqq 1$ を満たすが，本問では $r_{xy} > 0$ が仮定されている．(1) より $r_{xy} = \overline{u}$ であることもあわせると

$$0 < \overline{u} \leqq 1$$

である．$r_{xz} > 0$, $r_{xy} > 0$ であり，$r_{xz}$, $r_{xy}$ の大小は ${r_{xz}}^2$, ${r_{xy}}^2$ の大小と一致する．

$$\begin{aligned} {r_{xz}}^2 - {r_{xy}}^2 &= \frac{1+\overline{u}}{2} - \overline{u}^2 \\ &= -\left(\overline{u} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16} \\ &\geqq 0 \quad (\text{等号は } \overline{u} = 1 \text{ のとき成立する}) \end{aligned}$$




であり

$$r_{xz} \geqq r_{xy}$$

であることがわかる．