次の問いに答えよ．

(1) $2^{10}=1024>1000$ を利用して，$\log_{10}2>0.3$ を示せ．

(2) $\log_{10}2<\dfrac{4}{13}$ を示せ．

(3) $\log_{\frac{5}{2}}2026$ の整数部分を R とする．すなわち，$R\leqq\log_{\frac{5}{2}}2026$ を満たす最大の整数を R とする．R の値を求めよ．

(26 和歌山大 教育・経済・観光・シス工・社会 1)

【答】

(1) 略
(2) 略
(3) $R=8$

【解答】

(1) $2^{10}=1024>1000=10^3$ である．辺々の対数をとると

$$\log_{10}2^{10}>\log_{10}10^3$$
$$10\log_{10}2>3$$
$$\therefore\quad \log_{10}2>0.3 \qquad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

が成り立つ．

(2) 目標の不等式

$$\log_{10}2<\frac{4}{13} \qquad \cdots\cdots ①$$

を変形すると

$$① \iff 13\log_{10}2<4 \iff \log_{10}2^{13}<\log_{10}10^4$$
$$\iff 2^{13}<10^4 \qquad \cdots\cdots ①'$$

となるから，不等式 ①′ を示せばよい．

$$2^{13}=2^{10}\times2^3=1024\times8=8192<10000=10^4$$

であり，①′ が成り立つ．よって，不等式 ① は成り立つ．……(証明終わり)

(3) $\log_{\frac{5}{2}}2026$ を底を 10 とする対数に書き直すと

$$\log_{\frac{5}{2}}2026=\frac{\log_{10}2026}{\log_{10}\dfrac{5}{2}}=\frac{\log_{10}(2\times1013)}{\log_{10}\dfrac{10}{2^2}}=\frac{\log_{10}2+\log_{10}1013}{1-2\log_{10}2}$$

となる．(1)，(2) より

$$0.3<\log_{10}2<\frac{4}{13}\ (=0.307\cdots)$$

である．したがって，分母については

$$0.6<2\log_{10}2<\frac{8}{13}$$
$$1-\frac{8}{13}<1-2\log_{10}2<1-0.6$$
$$\therefore\quad \frac{5}{13}<1-2\log_{10}2<0.4$$

が成り立つ．よって

$$\log_{\frac{5}{2}} 2026 > \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 10^3}{0.4} > \frac{0.3+3}{0.4} = \frac{33}{4} = 8.25$$

$$\log_{\frac{5}{2}} 2026 < \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1024}{\frac{5}{13}} = \frac{\log_{10} 2 + 10\log_{10} 2}{\frac{5}{13}} < \frac{11 \times \frac{4}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{44}{5} = 8.8$$

$$\therefore \quad 8.25 < \log_{\frac{5}{2}} 2026 < 8.8$$

であり，$\log_{\frac{5}{2}} 2026$ の整数部分 R は

$$\boldsymbol{R = 8} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．