xy 平面上の点 P，Q を

$$\mathrm{P}(t,\ 2te^{-t}),\quad \mathrm{Q}(3t,\ 6te^{-2t})$$

とする．ただし $t>0$ とする．

(1) P と Q の y 座標が等しいとき，P の座標は

$$\left(\log \boxed{40},\ \frac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\log \boxed{43}\right)$$

である．

(2) t が $t>0$ の範囲を動くとき，直線 PQ の傾きは $t=\log \boxed{44}$ のとき最小であり，そのときの傾きは $\dfrac{\boxed{45}\boxed{46}}{\boxed{47}\boxed{48}}$ である．

(3) 直線 PQ の傾きが $\dfrac{1}{2}$ であるとき，

$$t=\log\left(\sqrt{\boxed{49}}-\boxed{50}\right)$$

である．

(26 青山学院大 全学部 理系 4)

【答】

40	41	42	43	44	4546	4748	49	50
3	2	3	3	6	-1	12	7	1

【解答】

$$\mathrm{P}(t,\ 2te^{-t}),\quad \mathrm{Q}(3t,\ 6te^{-2t})\quad (t>0)$$

(1) P と Q の y 座標が等しいとき

$$2te^{-t}=6te^{-2t}$$

$$2te^{-t}(1-3e^{-t})=0$$

$t\neq 0\ (>0)$ より

$$1-3e^{-t}=0\qquad \therefore\quad e^t=3\qquad \therefore\quad t=\log 3$$

である．このとき，P の座標は

$$\left(\mathbf{\log 3,\ \frac{2}{3}\log 3}\right)\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 直線 PQ の傾きは

$$\frac{6te^{-2t}-2te^{-t}}{3t-t}=3e^{-2t}-e^{-t}$$

である．$m(t)=3e^{-2t}-e^{-t}$ とおくと

$$m'(t)=3e^{-2t}\cdot(-2)-e^{-t}\cdot(-1)=-\frac{6}{e^{2t}}+\frac{1}{e^t}=\frac{-6+e^t}{e^{2t}}$$

$t>0$ のときの $m(t)$ の増減は下表となる．

t	(0)	$\cdots$	$\log 6$	$\cdots$
$m'(t)$		$-$	0	$+$
$m(t)$		↘		↗

よって，$m(t)$ は，$\boldsymbol{t=\log 6}$ のとき　　$\cdots\cdots$(答)

最小値 $m(\log 6)=3e^{-2\log 6}-e^{-\log 6}=3\cdot 6^{-2}-6^{-1}=\dfrac{3}{36}-\dfrac{1}{6}=\mathbf{\dfrac{-1}{12}}$　　$\cdots\cdots$(答)

をとる．

(3) $m(t)=\dfrac{1}{2}$ となる t の値は

$$3e^{-2t}-e^{-t}=\frac{1}{2}$$
$$6-2e^{t}=e^{2t}$$
$$e^{2t}+2e^{t}-6=0$$

$t>0$ より $e^{t}>1$ であり

$$e^{t}=-1+\sqrt{7} \qquad \therefore \quad t=\log\left(\boldsymbol{\sqrt{7}-1}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である.