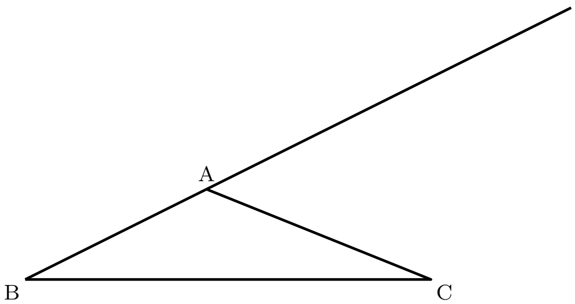
△ABC において，BC $= 3\sqrt{5}$，CA $= 5$，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ とし，∠BCA は鋭角であるとする．点 B を端点とする半直線 BA 上に 2 点 P，Q を，それぞれ BP $= 10$，∠BCQ $= 120^\circ$ となるようにとる．辺 BC を共通とする △ABC，△PBC，△QBC の外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とする．R_1，R_2，R_3 の大小関係について考察しよう．



参考図

余弦定理により

$$\mathrm{CP} = \boxed{\text{ア}}, \quad \cos\angle\mathrm{BCP} = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる．よって，∠BCP $\boxed{\text{エ}}$ ∠BCQ であることがわかる．したがって

$$\mathrm{CP}\ \boxed{\text{オ}}\ \mathrm{CQ}, \quad \mathrm{CP}\ \boxed{\text{カ}}\ \mathrm{CA}, \quad \mathrm{CQ}\ \boxed{\text{キ}}\ \mathrm{CA}$$

となる．このことから，R_1，R_2，R_3 の大小関係は $\boxed{\text{ク}}$ であることがわかる．

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

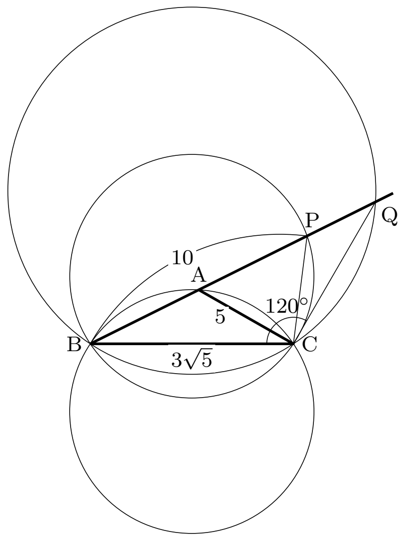
⓪ $R_1 < R_2 < R_3$	① $R_2 < R_3 < R_1$	② $R_3 < R_1 < R_2$
③ $R_1 = R_2 < R_3$	④ $R_2 = R_3 < R_1$	⑤ $R_3 = R_1 < R_2$
⑥ $R_1 < R_2 = R_3$	⑦ $R_2 < R_3 = R_1$	⑧ $R_3 < R_1 = R_2$
⑨ $R_1 = R_2 = R_3$		

(26 共通テスト 本試験 I 第 2 問〔1〕)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
5	5	5	0	0	1	2	3

【解答】



△PBC で余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} CP^2 &= BC^2 + BP^2 - 2BC\cdot BP\cos\angle PBC \\ &= 45+100-2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 10\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= 25 \end{aligned}$$

$\therefore\quad CP = \mathbf{5}\ (>0)$ ……(答)

である．これにより

$$\begin{aligned} \cos\angle BCP &= \frac{BC^2+CP^2-BP^2}{2BC\cdot CP} \\ &= \frac{45+25-100}{2\cdot 3\sqrt{5}\cdot 5} \\ &= -\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

よって，$\cos\angle BCP$ と $\cos\angle BCQ = \cos 120° = -\frac{1}{2}$ の大小は

$$\cos\angle BCP - \cos\angle BCQ = -\frac{\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{20}+\sqrt{25}}{10} > 0$$

$\therefore\quad \cos\angle BCP > \cos\angle BCQ$

$0° < \theta < 180°$ において $\cos\theta$ は減少であるから

$\angle BCP < \angle BCQ$ 　⓪ ……(答)

である．

したがって

$CP < CQ$ 　⓪ ……(答)

である．さらに

$CP = CA(=5)$ 　① ……(答)

であるから

$CQ > CP = CA \quad \therefore\quad CQ > CA$ 　② ……(答)

となる．

△ABC, △PBC, △QBC の外接円の半径をそれぞれ R_1, R_2, R_3 とおくと，正弦定理より

$$R_1 = \frac{CA}{2\sin\angle ABC},\ R_2 = \frac{CP}{2\sin\angle PBC},\ R_3 = \frac{CQ}{2\sin\angle QBC}$$

$CA = CP < CQ$, $\angle ABC = \angle PBC = \angle QBC$ であるから

$\boldsymbol{R_1 = R_2 < R_3}$ 　③ ……(答)

であることがわかる．