以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ．

(1) 四角形 ABCD の面積 S について考えよう．以下では，四角形 ABCD の内角 ∠A, ∠B, ∠C, ∠D の大きさを，それぞれ A, B, C, D で表す．ただし，四つの内角はいずれも 180° より小さいものとする．

対角線 BD を共通の 1 辺とする △ABD と △BCD の面積を，それぞれ S_1, S_2 とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{ク}}}{2}\sin A, \quad S_2 = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{2}\sin C$$

となる．

四角形 ABCD の四つの内角が $A + C = B + D$ を満たすとき，$A + C = \boxed{\text{コ}}$ となる．このとき，$\sin C$ を $\sin A$ を用いて表せることに注意すると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\boxed{\text{サ}}}{2}\sin A \qquad \cdots\cdots ①$$

となる．

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ AB · BD	① AB · AD	② AD · BD
③ BC · BD	④ BC · CD	⑤ BD · CD
⑥ AB · CD	⑦ AD · BC	⑧ AC · BD

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

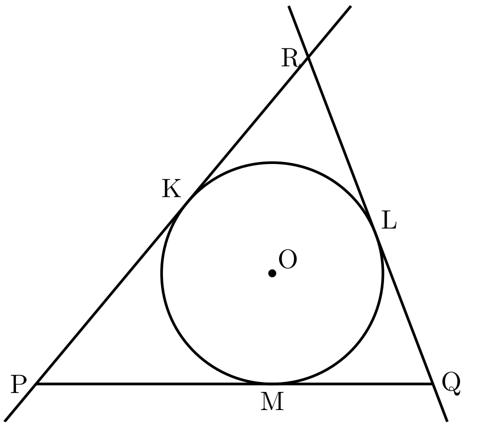
⓪ 90°	① 120°	② 135°	③ 150°
④ 180°	⑤ 240°	⑥ 270°	⑦ 360°

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ AB · BD + BC · BD	① AB · BD − BC · BD
② AB · AD + BC · CD	③ AB · AD − BC · CD
④ AD · BD + BD · CD	⑤ AD · BD − BD · CD
⑥ AB · CD + AD · BC	⑦ AB · CD − AD · BC
⑧ AC · BD	

(2) 点 O を中心とする半径 6 の円 O が，線分 PQ 上の P，Q と異なる点 M において線分 PQ に接している．P，Q それぞれを通る円 O の接線で，直線 PQ と異なるものを引き，この円との接点をそれぞれ K，L とする．以下では直線 PK, QL が交わる場合を考え，その交点を R とする．このとき，△PQR の辺の長さについて考えよう．

(i) PK = 12, QL = 9 であるときを考え，∠KPM = P, ∠LQM = Q とする．このとき，2 直線 PK，QL の交点 R は直線 PQ に関して点 O と同じ側にある．



参考図

四角形 PMOK が △PMO と △PKO に分けられることに注意すると，四角形 PMOK の面積は $\boxed{\text{シス}}$ であることがわかる．このことから，① を用いると，

$\sin P = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ となることがわかる．

四角形 QLOM についても同様に考えると，$\sin Q = \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ となることもわかる．よって，PR : QR = $\boxed{\text{トナ}}$: $\boxed{\text{ニヌ}}$ となり，これにより RL = $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる．

(ii) PK $= 4\sqrt{2}$，QL $= 3\sqrt{2}$ であるときを考える．このとき，2 直線 PK，QL の交点 R は，直線 PQ に関して点 O と反対側にある．このことに注意すると RL = $\boxed{\text{ヒフ}}\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる．

(26 共通テスト 本試験 I・A 第 1 問〔2〕，I 第 2 問〔2〕)

【答】	ク	ケ	コ	サ	シス	セ	ソ	タチ	ツテ	トナ	ニヌ	ネノ	ハ	ヒフ	ヘ
	1	4	4	2	72	4	5	12	13	15	13	21	2	21	2

【解答】

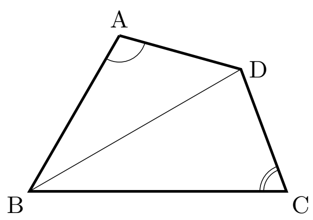
(1) 四つの内角 ∠A，∠B，∠C，∠D のいずれも 180° より小さい内角をもつ四角形 ABCD について考える．

BD を共通の 1 辺とする △ABD と △BCD のそれぞれの面積 S_1，S_2 は

$$S_1 = \frac{\mathbf{AB \cdot AD}}{2}\sin A \qquad ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$S_2 = \frac{\mathbf{BC \cdot CD}}{2}\sin C \qquad ④ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．



四角形 ABCD の四つの内角の和は，2 つの三角形の内角の総和に等しく

$$A+B+C+D=180^\circ\times 2$$

である．さらに，四角形 ABCD の四つの内角が $A+C=B+D$ を満たすから

$$(A+C)+(B+D)=360^\circ$$
$$(A+C)+(A+C)=360^\circ$$
$$\therefore\quad A+C=\mathbf{180^\circ}\qquad ④\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．このとき，$\sin C$ は

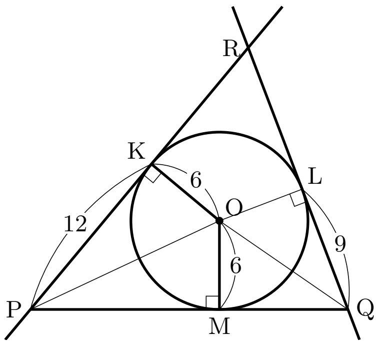
$$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$$

と表せるから

$$\begin{aligned}S&=S_1+S_2\\&=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A+\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\\&=\frac{\mathbf{AB\cdot AD+BC\cdot CD}}{\mathbf{2}}\sin\mathrm{A}\qquad\cdots\cdots ①\qquad ②\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

となる．

(2) (i) 直角三角形 △PMO, △PKO は
△PMO ≡ △PKO であるから



$$\begin{aligned}&(\text{四角形 PMOK の面積})\\&=2(\triangle\text{PKO の面積})\\&=2\times\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6\\&=\mathbf{72}\qquad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}P+\angle\mathrm{MOK}&=2(\angle\mathrm{OPK}+\angle\mathrm{POK})\\&=2\times(180^\circ-90^\circ)=180^\circ\end{aligned}$$

$$\angle\mathrm{PMO}+\angle\mathrm{PKO}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$
$$\therefore\quad P+\angle\mathrm{MOK}=\angle\mathrm{PMO}+\angle\mathrm{PKO}$$

を満たすから，① を用いることができ

$$72=\frac{12\cdot 12+6\cdot 6}{2}\sin P$$
$$\therefore\quad \sin P=\frac{72}{72+18}=\frac{72}{90}=\mathbf{\frac{4}{5}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

となることがわかる．

四角形 QLOM についても同様に考えると

$$(\text{四角形 QLOM の面積})=2\times\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=54$$

① を用いることができ

$$54=\frac{9\cdot 9+6\cdot 6}{2}\sin Q$$
$$\therefore\quad \sin Q=54\cdot\frac{2}{117}=\mathbf{\frac{12}{13}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．よって，正弦定理 $\dfrac{\mathrm{PR}}{\sin Q}=\dfrac{\mathrm{QR}}{\sin P}$ より

$$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin Q:\sin P=\frac{12}{13}:\frac{4}{5}=\mathbf{15:13}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

となり，RK $=$ RL に注意すると

$$
\begin{aligned}
&(12+\mathrm{RL}):(9+\mathrm{RL})=15:13\\
&13(12+\mathrm{RL})=15(9+\mathrm{RL})\\
&(15-13)\mathrm{RL}=13\cdot 12-15\cdot 9\\
\therefore\quad &\mathrm{RL}=\frac{3(52-45)}{2}=\boldsymbol{\frac{21}{2}}
\end{aligned}
$$

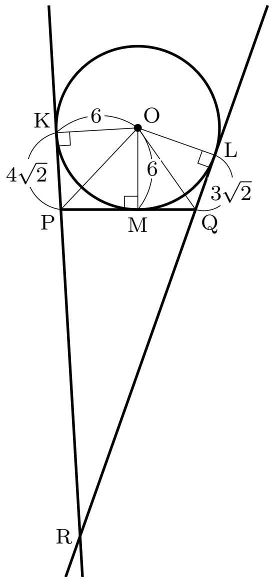
……(答)

と求められるので，△PQR の辺の長さは

$$2\left(12+9+\frac{21}{2}\right)=63$$

である．

(ii) (i) と同じようにして RL の長さを求める．



$$(\text{四角形 PMOK の面積})=2\times\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6=24\sqrt{2}$$

① を用いることができ

$$24\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}+6\cdot 6}{2}\sin P$$

$$\therefore\quad \sin P=\frac{24\sqrt{2}}{16+18}=\frac{12\sqrt{2}}{17}$$

となる．また

$$(\text{四角形 QLOM の面積})=2\times\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 6=18\sqrt{2}$$

① を用いることができ

$$18\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}+6\cdot 6}{2}\sin Q$$

$$\therefore\quad \sin Q=\frac{18\sqrt{2}}{9+18}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

となる．よって，正弦定理より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{PR}:\mathrm{QR}&=\sin\angle\mathrm{RQP}:\sin\angle\mathrm{RPQ}\\
&=\sin(180^\circ-Q):\sin(180^\circ-P)\\
&=\sin Q:\sin P\\
&=\frac{2\sqrt{2}}{3}:\frac{12\sqrt{2}}{17}\\
&=17:18
\end{aligned}
$$

となる．RK $=$ RL に注意すると

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{RL}-4\sqrt{2}):(\mathrm{RL}-3\sqrt{2})=17:18\\
&18(\mathrm{RL}-4\sqrt{2})=17(\mathrm{RL}-3\sqrt{2})\\
&\mathrm{RL}=72\sqrt{2}-51\sqrt{2}=\boldsymbol{21\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

……(答)

と求められるので，△PQR の辺の長さは

$$(21\sqrt{2}-4\sqrt{2})+(21\sqrt{2}-3\sqrt{2})+(4\sqrt{2}+3\sqrt{2})=46\sqrt{2}$$

である．