平面上に 3 点 A，B，C があり，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=|x-4|$，$\mathrm{CA}=\sqrt{x^2-1}$ である．

1. 3 点 A，B，C を結んだとき，三角形となる x の範囲は，$\dfrac{\boxed{32}}{\boxed{33}} < x < \dfrac{\boxed{34}\boxed{35}}{\boxed{36}}$ である．
2. △ABC において，∠A が他の 2 角より大きい，または，鋭角三角形になるのは，$\dfrac{\boxed{37}}{\boxed{38}} < x < \dfrac{\boxed{39}}{\boxed{40}}$ のときである．

(26 青山学院大 経済 2(2))

【答】

32	33	3435	36	37	38	39	40
5	3	13	5	5	3	9	4

【解答】

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{BC}=|x-4|,\ \mathrm{CA}=\sqrt{x^2-1}$$

1. AB，BC，CA が三角形の 3 辺となる条件は

$$|\mathrm{AB}-\mathrm{BC}| < \mathrm{CA} < |\mathrm{AB}+\mathrm{BC}|$$

であるから

$$\begin{aligned}
&|1-|x-4|| < \sqrt{x^2-1} < |1+|x-4||\\
\iff& 1-2|x-4|+(x^2-8x+16) < x^2-1 < 1+2|x-4|+(x^2-8x+16)\\
\iff& -2|x-4|-8x+18 < 0 < 2|x-4|-8x+18\\
\iff& -|x-4| < 4x-9 < |x-4|\\
\iff& |4x-9| < |x-4|\\
\iff& 16x^2-72x+81 < x^2-8x+16\\
\therefore\ & 15x^2-64x+65<0\\
& (3x-5)(5x-13)<0\\
\therefore\ & \boldsymbol{\frac{5}{3}} < x < \boldsymbol{\frac{13}{5}} \quad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

……(答)

である．

2. ① のもとでは

$$\mathrm{BC}=4-x$$

である．さらに，∠A が他の 2 角より大である条件は

$$\begin{cases}\mathrm{AB}<\mathrm{BC}\\ \mathrm{CA}<\mathrm{BC}\end{cases} \quad \therefore \quad (*)\begin{cases}1<4-x\\ \sqrt{x^2-1}<4-x\end{cases}$$

である．① のもとで $(*)$ を解く．

$$\begin{cases}\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{13}{5}\\ x<3\\ x^2-1<(4-x)^2 \text{ かつ } x^2-1\geqq 0 \text{ かつ } 4-x\geqq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{5}{3}<x<\dfrac{13}{5}\\ -1<16-8x\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{5}{3}<x<\frac{17}{8} \quad \cdots\cdots ②$$

である．

△ABC が鋭角三角形になる条件は

$$|\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2|<\mathrm{CA}^2<\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$$

であるから

$$|1^2-(4-x)^2|<x^2-1<1^2+(4-x)^2$$
$$|-x^2+8x-15|<x^2-1<x^2-8x+17 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．第 2 の不等式を解くと

$$-1<-8x+17 \qquad \therefore \quad x<\frac{9}{4}$$

これが成り立つとき $-x^2+8x-15=-(x-3)(x-5)<0$ であり，第 1 の不等式は

$$-(-x^2+8x-15)<x^2-1$$
$$-8x<-16$$
$$\therefore \quad x>2$$

となる．③の解は

$$2<x<\frac{9}{4} \qquad \cdots\cdots ③'$$

である．

よって，条件を満たす x の範囲は「② または ③′」すなわち

$$\boldsymbol{\frac{5}{3}<x<\frac{9}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．