(1) 二つの角 A, B に対し

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示そう．

二つの角 α, β に対し，加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta) = \boxed{ア} + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \boxed{ア} - \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ③$$

である．② と ③ の左辺どうし，右辺どうしを加え，$\alpha = \boxed{イ}$，$\beta = \boxed{ウ}$ とすると，① が得られる．

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ $\sin\alpha\sin\beta$	① $\sin\alpha\cos\beta$	② $\cos\alpha\sin\beta$	③ $\cos\alpha\cos\beta$
④ $\sin^2\alpha$	⑤ $\sin^2\beta$	⑥ $\cos^2\alpha$	⑦ $\cos^2\beta$

$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ A	① B	② $A+B$	③ $A-B$
④ $\dfrac{A+B}{2}$	⑤ $\dfrac{A-B}{2}$	⑥ $\dfrac{A+B}{4}$	⑦ $\dfrac{A-B}{4}$

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$$

とする．

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $f(x)$ の最大値を考えよう．

① を用いると

$$f(x) = 2\sin\left(x + \boxed{エ}\right)\cos\boxed{オ}$$

$$= 2\cos\boxed{オ}\sin\left(x + \boxed{エ}\right)$$

と変形できる．

$2\cos\boxed{オ}$ は正の定数であるから，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲において，$f(x)$ は $x = \boxed{カ}$ で最大値 $\boxed{キ}$ をとる．

$\boxed{エ}$～$\boxed{カ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{12}$	② $\dfrac{\pi}{6}$	③ $\dfrac{\pi}{4}$
④ $\dfrac{\pi}{3}$	⑤ $\dfrac{\pi}{2}$	⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$	⑦ π

$\boxed{キ}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① 1	② 2	③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\sqrt{2}$	⑥ $\sqrt{3}$	⑦ $2\sqrt{2}$

(3) a を $0 < a < \pi$ を満たす定数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$$

とする．

花子さんと太郎さんは，関数 $y = g(x)$ のグラフをコンピュータを用いて表示させてみた．図 1 は，$a = 0.5$，$a = 1.0$，$a = 1.5$ としたときの $y = g(x)$ のグラフである．これを見て，花子さんと太郎さんは，関数 $g(x)$ について話している．

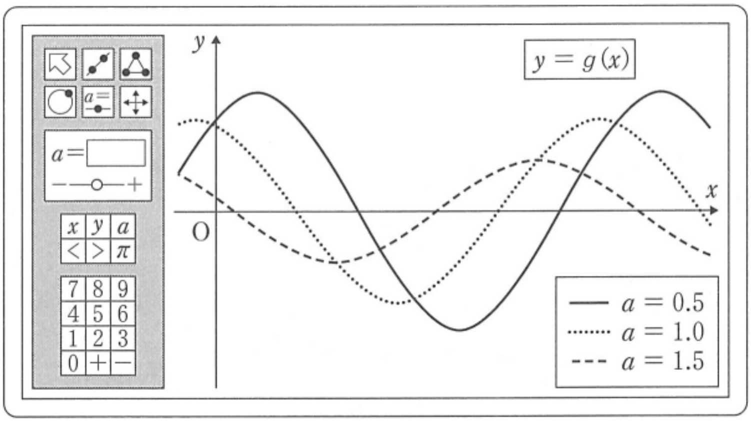

図 1

花子：$g(x)$ は，定数 p，q を用いて $g(x) = p\sin(x+q)$ と変形できそうだね．

太郎：三つの関数 $\sin(x+a)$，$\sin(x+2a)$，$\sin(x+3a)$ のうちの二つの関数の和に ① を使うと，残り一つの関数の定数倍にできるかな．

(i) ① を用いると，関数 $\sin(x+a)$，$\sin(x+2a)$，$\sin(x+3a)$ のうちの二つの関数の和 $\boxed{\text{ク}}$ は，残りの関数 $\sin\left(x + \boxed{\text{ケ}}\right)$ の定数倍となる．

したがって，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \boxed{\text{コ}} \sin\left(x + \boxed{\text{ケ}}\right)$$

と変形することができる．

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\sin(x+a) + \sin(x+2a)$	① $\sin(x+a) + \sin(x+3a)$
② $\sin(x+2a) + \sin(x+3a)$	

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ a	① $2a$	② $3a$

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $2\cos a$	① $-2\cos a$
② $2\cos 2a$	③ $-2\cos 2a$
④ $(2\cos a + 1)$	⑤ $(-2\cos a + 1)$
⑥ $(2\cos 2a + 1)$	⑦ $(-2\cos 2a + 1)$

(ii) $a = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲において，$g(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる．

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1
④ -2	⑤ $\sqrt{3}$	⑥ $-\sqrt{3}$	⑦ $\sqrt{3}+1$
⑧ $\sqrt{3}-1$	⑨ $-\sqrt{3}+1$		

(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 2 問)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	ス	セ
1	4	5	3	2	3	6	1	1	4	11	6	8

【解答】

(1) 角 A, B に対して

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す．

角 α, β に対し，加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta) = \boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta} + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ② \qquad ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ③$$

であり，②, ③ の辺々を加えると

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad \cdots\cdots ④$$

が得られる．

$$A = \alpha+\beta,\ B = \alpha-\beta$$

とおくと

$$\alpha = \boldsymbol{\frac{A+B}{2}},\quad \beta = \boldsymbol{\frac{A-B}{2}} \qquad ④,\ ⑤ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，④ から ① が得られる．

(2) $$f(x) = \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$$

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で $f(x)$ の最大値を求める．① を用いると

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}\cos\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\} \\ &= 2\sin\left(x+\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right)\cos\boldsymbol{\frac{\pi}{6}} \qquad ③,\ ② \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

と変形でき，$f(x)$ は

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},\ \text{すなわち}\ x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\ \text{で最大値}\ \boldsymbol{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(3) $$g(x) = \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$$

(i)
$$\sin(x+a)+\sin(x+3a)$$
$$=2\sin\frac{(x+a)+(x+3a)}{2}\cos\frac{(x+a)-(x+3a)}{2}$$
$$=2\sin(x+2a)\cos a$$

であり，$\cos a$ は定数であるから，二つの関数の和 $\boldsymbol{\sin(x+a)+\sin(x+3a)}$ は残りの関数 $\boldsymbol{\sin(x+2a)}$ の定数倍となる． 1, 1 ……(答)

したがって，関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= \{\sin(x+a)+\sin(x+3a)\}+\sin(x+2a) \\ &= 2\sin(x+2a)\cos a+\sin(x+2a) \\ &= \boldsymbol{(2\cos a+1)}\sin(x+2a) \quad 4 \end{aligned}$$
……(答)

と変形することができる．

(ii) $a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right) \\ &= (-\sqrt{3}+1)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

であり，x が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲を動くとき，$x+\dfrac{5}{3}\pi$ は $\dfrac{5}{3}\pi \leqq x+\dfrac{5}{3}\pi < \dfrac{11}{3}\pi$ の範囲を動くから，$-\sqrt{3}+1<0$ であることに注意すると，$g(x)$ は $\sin\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)=-1$ となる x で，すなわち

$$x+\frac{5}{3}\pi=\frac{7\pi}{2} \qquad \therefore \quad x=\boldsymbol{\frac{11}{6}}\pi$$
……(答)

で

$$\text{最大値 } (-\sqrt{3}+1)(-1)=\boldsymbol{\sqrt{3}-1} \quad 8$$
……(答)

をとる．