O を原点とする座標平面において，方程式

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の表す円を C_1 とする．また，方程式

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の表す円を C_2 とする．

(1) C_1 の中心の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である．

C_1 の半径を r_1，C_2 の半径を r_2，C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とすると，$r_1=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$，$r_2=\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$d=\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}$ である．

r_1，r_2 と d の関係から，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる．

(2) 不等式

$$x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0 \qquad \cdots\cdots ③$$

の表す領域について考える．

③ の左辺は，$2x-5y+25 \geqq 0$ のときは ① の左辺と一致し，$2x-5y+25<0$ のときは ② の左辺と一致する．

(i) 不等式 $2x-5y+25 \geqq 0$ の表す領域を D，不等式 $2x-5y+25<0$ の表す領域を E とする．

- 原点 O は $\boxed{\text{コ}}$ に含まれる．
- C_1 の中心は $\boxed{\text{サ}}$ に含まれる．
- C_2 の中心は $\boxed{\text{シ}}$ に含まれる．

$\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ D	① E

(ii) 方程式

$$2x-5y+25=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

の表す直線を ℓ とする．

実数 $x,\ y$ が ① と ② の両方を満たすとする．① と ② の左辺どうし，右辺どうしの差をとると

$$2(2x-5y+25)=0$$

となる．よって，実数 $x,\ y$ は ④ も満たす．

したがって，$\boxed{\text{ス}}$．このことから，ℓ は C_1 と C_2 の二つの交点を通る直線であることがわかる．

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ 点 P を ℓ 上の点とすると，P は C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある
① 点 P を ℓ 上の点とすると，P は C_1 上にあるか，または C_2 上にある
② 点 P を C_1 上にあり，かつ C_2 上にもある点とすると，P は ℓ 上にある
③ 点 P を C_1 上にあるか，または C_2 上にある点とすると，P は ℓ 上にある
④ 点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は ℓ と一致する
⑤ 点 P を C_1 上の点，点 Q を C_2 上の点とすると，直線 PQ は ℓ と交わる

(iii) 不等式

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$$

の表す領域と (i) の領域 D の共通部分を F とする．

また，不等式

$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$$

の表す領域と (i) の領域 E の共通部分を G とする．

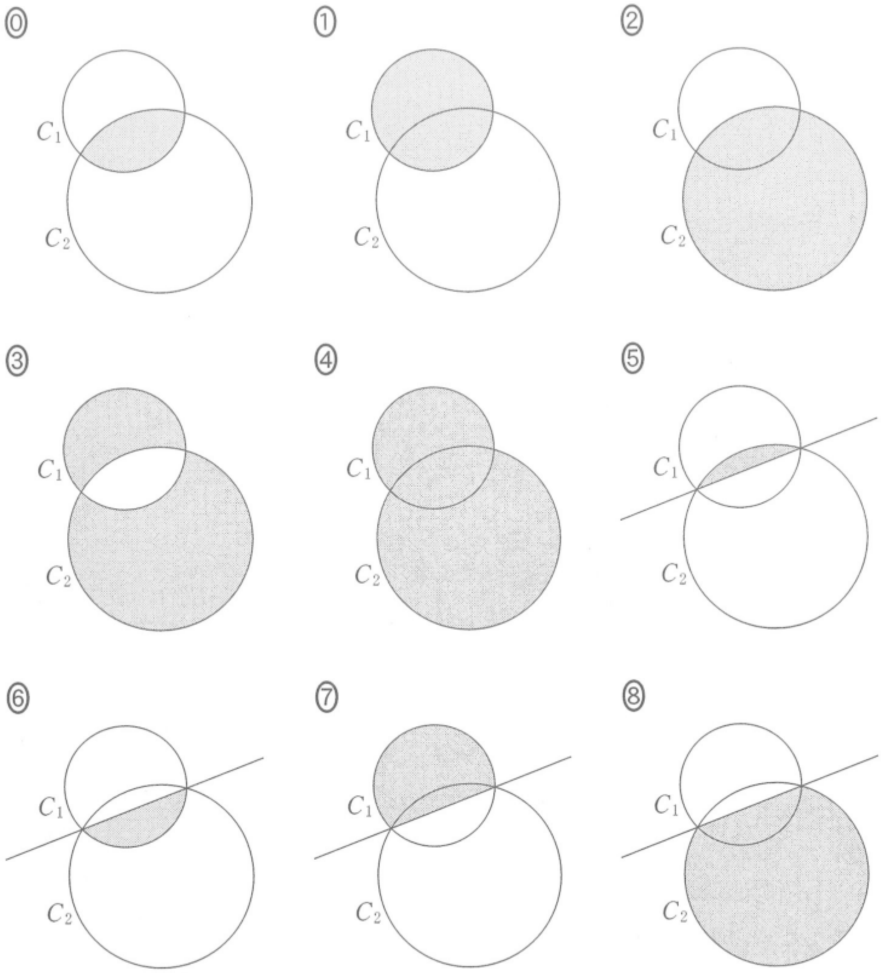
不等式 ③ の表す領域は，F と G の和集合である．これを図示すると $\boxed{\text{セ}}$ の灰色部分である．ただし，境界線を含まない．

(iv) ③ において，$|2x-5y+25|$ の前の符号を $+$ から $-$ に変えた不等式

$$x^2+y^2-7y-|2x-5y+25|<0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を考える．⑤ の表す領域を図示すると $\boxed{\text{ソ}}$ の灰色部分である．ただし，境界線を含まない．

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ．ただし，同じものを繰り返し選んでもよい．なお，⓪～⑧では座標軸を省略している．



(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 1 問)

【答】

アイ	ウ	エ	オ	カ	キ	クケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
-1	6	2	3	3	3	29	0	1	0	2	0	4

【解答】

$$C_1 : x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) 平方完成すると

$$C_1 : (x+1)^2 + (y-6)^2 = 12$$

$$C_2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 27$$

であるから

$$C_1 \text{ の中心の座標は } \boldsymbol{(-1,\ 6)}\text{，半径 } r_1 = \boldsymbol{2\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$C_2 \text{ の中心の座標は } (1,\ 1)\text{，半径 } r_2 = \boldsymbol{3\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離 d は

$$d = \sqrt{(-1-1)^2 + (6-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{29}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$$|r_1 - r_2| = |2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}| = \sqrt{3},$$
$$r_2 + r_1 = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

より

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$$

が成り立つから，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる．

(2) $$x^2 + y^2 - 7y + |2x - 5y + 25| < 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

(i) $$D = \{(x,\ y)\,|\,2x - 5y + 25 \geqq 0\}$$
$$E = \{(x,\ y)\,|\,2x - 5y + 25 < 0\}$$

$f(x,\ y) = 2x - 5y + 25$ とおく．

- $f(0,\ 0) = 0 + 0 + 25 = 25 \geqq 0$ であり，$\boldsymbol{(0,\ 0) \in D}$ である． ⓪ ……(答)
- $f(-1,\ 6) = -2 - 30 + 25 = -7 < 0$ であり，$\boldsymbol{(-1,\ 6) \in E}$ である． ① ……(答)
- $f(1,\ 1) = 2 - 5 + 25 = 22 \geqq 0$ であり，$\boldsymbol{(1,\ 1) \in D}$ である． ⓪ ……(答)

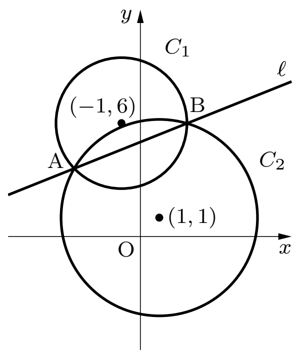
(ii) $$\ell : 2x - 5y + 25 = 0 \qquad \cdots\cdots ④$$

実数 $x,\ y$ が ①，② の両方を満たすとき，辺々を引くと

$$2(2x - 5y + 25) = 0$$

となり，$x,\ y$ は ④ も満たす．

すなわち，2 円 C_1，C_2 の交点 $(x,\ y)$ は直線 ℓ 上の点でもある．このことから，ℓ は C_1 と C_2 の二つの交点を通る直線であることがわかる．



二つの交点を A，B とし，⓪〜⑤の真偽を確かめる．

⓪ 点 P を ℓ 上の A，B 以外の点とすれば，P は C_1 上にも C_2 上にもないので，偽である．

① ⓪と同じ点 P をとると，偽であることがわかる．

② C_1 上かつ C_2 上にある点 P は A または B であり，P は ℓ 上にあるから，真である．

③ 点 P を C_1 上の A，B 以外の点とすれば，P は ℓ 上にないので，偽である．

④ 点 P を C_1 上の A，B 以外の点，点 Q を C_2 上の A，B 以外の点とするとき，直線 PQ は ℓ と一致しないので，偽である．

⑤ ℓ と平行で C_2 と交わる C_1 の接線 ℓ' を引くことができる．ℓ' と C_1 の接点を P，ℓ' と C_2 の交点の一つを Q とすれば，直線 PQ $(= \ell')$ は ℓ と交わらないので，偽である．

以上より，正しいのは ② のみである． ……(答)

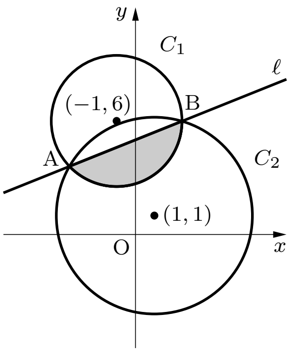
(iii) $$F : \begin{cases} x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) < 0 \\ D : 2x - 5y + 25 \geqq 0 \end{cases}$$

$$G : \begin{cases} x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) < 0 \\ E : 2x - 5y + 25 < 0 \end{cases}$$

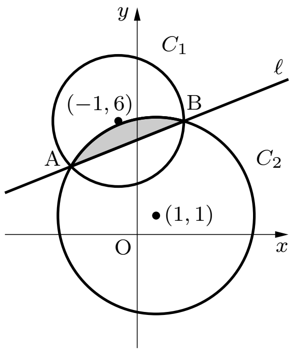
領域 F は C_1 の内部かつ「ℓ および ℓ の下側 ((i) より (0, 0)，(1, 1) を含む側)」であるから，下左図の灰色部分となる．境界線は線分 AB は含み (端点 A，B は除く)，円周部分は含まない．

領域 G は C_2 の内部かつ ℓ の上側 ((i) より (−1, 6) を含む側) であるから，下中図の灰色部分となる．境界線は含まない．

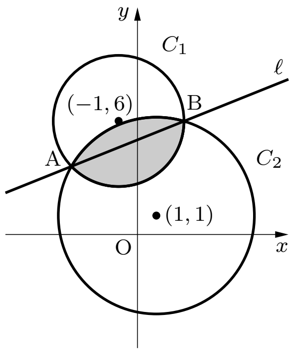
不等式 ③ の表す領域は，F と G の和集合 $F \cup G$ であり，図示すると下右図の灰色部分となる．境界線は含まない．　　0　　……(答)



領域 F



領域 G



領域 $F \cup G$

(iv)
$$x^2 + y^2 - 7y - |2x - 5y + 25| < 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ の絶対値をはずし

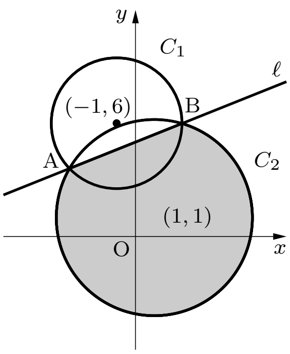
$$F' : \begin{cases} x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) < 0 \\ D : 2x - 5y + 25 \geqq 0 \end{cases}$$

$$G' : \begin{cases} x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) < 0 \\ E : 2x - 5y + 25 < 0 \end{cases}$$

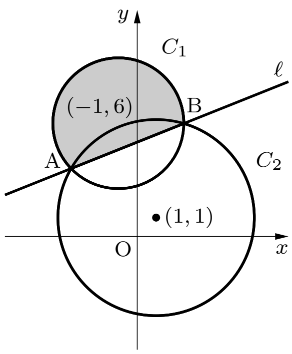
とおくと，F' が表す領域は下左図であり，境界線は線分 AB は含み (端点 A，B は除く)，円周部分は含まない．G' が表す領域は下中図であり，境界線は含まない．

よって，不等式 ⑤ の表す領域 $F' \cup G'$ は下右図の灰色部分となる．境界線は含まない．

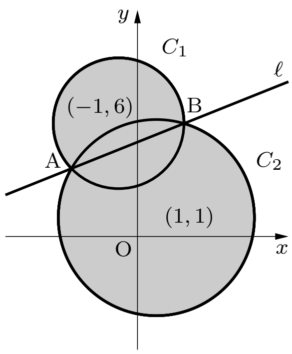
4　　……(答)



領域 F'



領域 G'



領域 $F' \cup G'$