a を実数とする．円 C_1 を $x^2+y^2-3ax+ay+5a-25=0$，円 C_2 を $x^2+6x+y^2-2y=0$ とする．

(1) C_1 は a の値によらずに 2 つの定点を通る．この 2 点の座標を求めよ．
(2) a がすべての実数を動くとき，C_1 の半径の最小値を求めよ．
(3) C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点をもつとき，a の値を求めよ．

(26 青山学院大 社会情報 C 4)

【答】
(1) $(0,\ -5)$，$(3,\ 4)$
(2) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$
(3) $a=5,\ -\dfrac{3}{5}$

【解答】

$$C_1 : x^2+y^2-3ax+ay+5a-25=0$$
$$C_2 : x^2+6x+y^2-2y=0$$

(1) 方程式 C_1 を a について整理すると

$$x^2+y^2-25-(3x-y-5)a=0$$

であり，これが a の値によらず成り立つ条件は

$$\begin{cases} x^2+y^2-25=0 \\ 3x-y-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3x-5 \\ x^2+(3x-5)^2-25=0 \end{cases}$$

であり，これを解くと

$$\begin{cases} y=3x-5 \\ 10x^2-30x=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} y=3x-5 \\ x(x-3)=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ (x,\ y)=\mathbf{(0,\ -5),\ (3,\ 4)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$C_1 : \left(x-\frac{3a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{2}a^2-5a+25$$

であり，C_1 の半径は

$$\sqrt{\frac{5}{2}a^2-5a+25}=\sqrt{\frac{5}{2}(a-1)^2+\frac{45}{2}}$$

である．半径は $a=1$ のとき

$$\text{最小値 } \sqrt{\frac{45}{2}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{10}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(3) C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点をもつ条件は

$$\begin{cases} x^2+y^2-3ax+ay+5a-25=0 \\ x^2+6x+y^2-2y=0 \end{cases} \text{ がただ一組の解 } (x,\ y) \text{ をもつ}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+6x+y^2-2y=0 \\ (6+3a)x-(2+a)y-5a+25=0 \end{cases} \text{ がただ一組の解 } (x,\ y) \text{ をもつ}$$

($\because$ 辺々の差をとった)

ことであり，第 1 式である円 C_2 の方程式は

$$(x+3)^2+(y-1)^2=10$$

であるから，上の条件は

「中心 $(-3,\ 1)$ と直線 $3(2+a)x-(2+a)y-5a+25=0$ の距離が半径$\sqrt{10}$に等しい」

と言い換えられる．

$$\frac{|3(2+a)\cdot(-3)-(2+a)\cdot 1-5a+25|}{\sqrt{9(2+a)^2+(2+a)^2}}=\sqrt{10}$$

$$|-15a+5|=10|2+a|$$

$$3a-1=\pm 2(a+2)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=5,\ -\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 2 円 C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点をもつということは

  2 円が外接するまたは内接する

  ということであるから

  (中心間の距離) $=$ (半径の和) または (中心間の距離) $=$ (半径の差)

  を解いてもよい．

$$(\text{中心間の距離})=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}+3\right)^2+\left(-\frac{a}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}|a+2|$$

  (2) より (C_1の半径) $>$ (C_2の半径) であるから

$$\sqrt{\frac{5}{2}}|a+2|=\sqrt{\frac{5}{2}a^2-5a+25}\pm\sqrt{10}$$

  を解けばよい．

$$\sqrt{\frac{5}{2}}|a+2|\mp\sqrt{10}=\sqrt{\frac{5}{2}a^2-5a+25}\quad (\text{以下，複号同順})$$

$$\frac{5}{2}(a^2+4a+4)\mp 10|a+2|+10=\frac{5}{2}a^2-5a+25$$

$$\mp 10|a+2|=-15a+5$$

$$\mp 2(a+2)=-3a+1$$

$$\therefore\quad a=5,\ -\frac{3}{5}$$

  である．