円 $x^2+y^2=1$ のうち $y>0$ の部分を C とする．

(1) 直線 $2x+3y=1$ と C は共有点を持つか．持つ場合はその座標を求めよ．

(2) 直線 $px+qy=1$ と C が異なる 2 点で交わるための必要十分条件を p と q を用いて表せ．また，この条件をみたす $(p,\ q)$ 全体の集合を，pq 平面 (横軸を p 軸，縦軸を q 軸とする平面) 上に図示せよ．

(26 札幌医大 2)

【答】

(1) 共有点 $\left(\dfrac{2-6\sqrt{3}}{13},\ \dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}\right)$ を持つ．

(2) 略

【解答】

$$C:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$$

(1) 直線 $2x+3y=1$ と C が共有点を持つか否かは

$$\begin{cases}2x+3y=1\\ x^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}\iff\begin{cases}x=\dfrac{1-3y}{2}\\ \left(\dfrac{1-3y}{2}\right)^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$$

を満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するか否かで決まる．第 2 式を解くと

$$(1-6y+9y^2)+4y^2=4$$

$$13y^2-6y-3=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{3\pm\sqrt{48}}{13}=\frac{3\pm4\sqrt{3}}{13}$$

である．$y>0$ より $\quad y=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}\quad$ であり

$$x=\frac{1}{2}\left(1-3\cdot\frac{3+4\sqrt{3}}{13}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-12\sqrt{3}}{13}=\frac{2-6\sqrt{3}}{13}$$

である．よって，直線 $2x+3y=1$ と C は

共有点 $\boldsymbol{\left(\dfrac{2-6\sqrt{3}}{13},\ \dfrac{3+4\sqrt{3}}{13}\right)}$ ……(答)

を持つ．

(2) 直線 $px+qy=1$ と C が異なる 2 点で交わるための条件は

$$(*)\begin{cases}px+qy=1\\ x^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$$

を満たす異なる 2 つの実数の組 $(x,\ y)$ が存在することである．

$$(*)\iff(\text{i})\begin{cases}p=0\\ qy=1\\ x^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}\quad\text{または}\quad(\text{ii})\begin{cases}p\neq0\\ x=\dfrac{1-qy}{p}\\ \left(\dfrac{1-qy}{p}\right)^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$$

(i) について

$$(\mathrm{i}) \iff \begin{cases} p=0 \\ y=\dfrac{1}{q}>0 \\ x^2=1-\left(\dfrac{1}{q}\right)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} p=0 \\ y=\dfrac{1}{q}>0 \\ x^2=\dfrac{(q+1)(q-1)}{q^2} \end{cases}$$

異なる 2 つの実数 x が存在する条件は $x^2>0$ であるから，異なる 2 つの実数の組 $(x,\ y)$ が存在する条件は

$$\begin{cases} p=0 \\ q>0 \\ (q+1)(q-1)>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} p=0 \\ q>1 \end{cases}$$

である．

(ii) について

y の値に対し x は $x=\dfrac{1-qy}{p}$ として 1 通りに決まるから，異なる 2 つの実数の組 $(x,\ y)$ が存在する条件は

$$\begin{cases} p \fallingdotseq 0 \\ \left(\dfrac{1-qy}{p}\right)^2+y^2=1 \\ y>0 \end{cases}$$

を満たす異なる 2 つの実数 y が存在することである．第 2 式より

$$(1-qy)^2+p^2y^2=p^2$$
$$(p^2+q^2)y^2-2qy+1-p^2=0$$

$f(y)=(p^2+q^2)y^2-2qy+1-p^2$ とおくと，$p \fallingdotseq 0$ より $f(y)$ は 2 次式であり，$f(y)=0$ が異なる 2 つの正の実数解 y を持つ条件は

$$\begin{cases} \text{判別式}:q^2-(p^2+q^2)(1-p^2)>0 \\ \text{軸の位置}:y=\dfrac{q}{p^2+q^2}>0 \\ \text{端点の符号}:f(0)=1-p^2>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} -p^2+(p^2+q^2)p^2>0 \\ q>0 \\ -1<p<1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} p^2(p^2+q^2-1)>0 \\ q>0 \\ -1<p<1 \end{cases}$$

(ii) の条件は

$$\begin{cases} p \fallingdotseq 0 \\ p^2+q^2>1 \\ q>0 \\ -1<p<1 \end{cases}$$

である．

よって，(i) または (ii) を図示すると，右図の斜線部分となる．境界はすべて除く．