a を正の定数とする．直線 $y=-x$ が円 $x^2+y^2+4ax=0$ によって切り取られてできる線分の長さが 2 であるとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(26 立教大 文系 2 月 6 日 1(1))

【答】

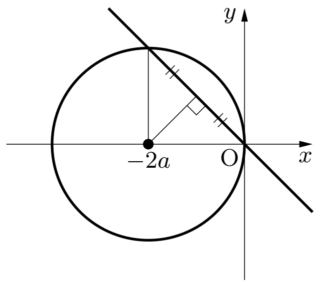
ア
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】

$$\text{直線}: y=-x \quad \cdots\cdots ①$$

$$\text{円}: x^2+y^2+4ax=0 \quad (a>0) \quad \cdots\cdots ②$$

円 ② は



$$(x+2a)^2+y^2=(2a)^2$$

と変形されるから

$$\text{中心の座標}\ (-2a,\ 0), \quad \text{半径}\ 2a$$

である．中心と直線 ① との距離 h は

$$h=\frac{|-2a+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}a \quad (\because\ a>0)$$

であるから，直線 ① が円 ② によって切り取られてできる線分の長さが 2 となる条件は

$$2\sqrt{(\text{半径})^2-h^2}=2 \qquad \therefore\ \sqrt{(2a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=1$$

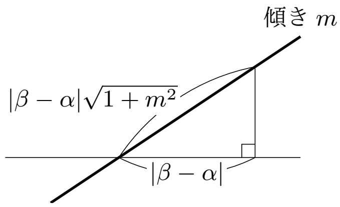
$$\sqrt{2}a=1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a=\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- ①, ② の交点の x 座標は

  $$x^2+(-x)^2+4ax=0$$
  $$2x(x+2a)=0$$
  $$\therefore\ x=0, -2a\ (<0)$$

  である．①の傾きが -1 であることに注意すると，直線 ① が円 ② によって切り取られてできる線分の長さは

  $$|0-(-2a)|\sqrt{1+(-1)^2}=2\sqrt{2}a$$

  であるから，この線分の長さが 2 となるときの a の値は

  $$2\sqrt{2}a=2 \qquad \therefore\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  である．

- 中心 $(-2a,\ 0)$ と交点 $(0,\ 0)$，$(-2a,\ 2a)$ を結んでできる三角形は直角二等辺三角形であり，線分の長さは

  $$\sqrt{2}(\text{半径})=2\sqrt{2}a$$

  であるから，この線分の長さが 2 となるときの a の値は

  $$2\sqrt{2}a=2 \qquad \therefore\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  である．