座標平面において，点 $\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ を中心とする半径 r の円を C とする．直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ に関して C と対称である円を C' とする．C と C' が外接するとき，$r=\boxed{\text{キ}}$ であり，C' の中心の座標は $\boxed{\text{ク}}$ である．

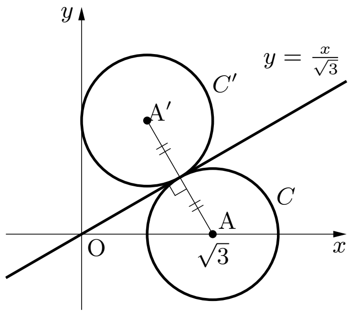
(26 立教大 理系 2 月 9 日 1(5))

【答】

キ	ク
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

【解答】

C' は直線 $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ に関して円 C と対称な円であり，C と C' は外接するから，C と C' は直線 $\ell : y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ に接している．



C の半径 r は C の中心 $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ と直線 $\ell : x-\sqrt{3}y=0$ の距離に等しいから

$$r=\frac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

C' の中心 $\mathrm{A}'(a,\ b)$ は $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ の直線 ℓ に関する対称点であるから

線分 AA'の中点は直線 ℓ上にあり，直線 AA'と直線 ℓは直交する

$$\iff \begin{cases} \dfrac{a+\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{b+0}{2}=0 \\ \dfrac{b-0}{a-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a-\sqrt{3}b=-\sqrt{3} \\ b=-\sqrt{3}(a-\sqrt{3}) \\ a-\sqrt{3}\neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \ a-\sqrt{3}\{-\sqrt{3}(a-\sqrt{3})\}=-\sqrt{3}$$

$$a+3(a-\sqrt{3})=-\sqrt{3} \qquad \therefore\ \ a=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \ b=-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}$$

よって，C' の中心の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)}$ である． ……(答)

- 線分 AA' の中点を M とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}'} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= 2\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|^2}\vec{\ell}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \end{aligned}$$

$\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}\text{ は }\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の }\vec{\ell}\text{ への正射影ベクトル，}\vec{\ell}=\left(\sqrt{3},\ 1\right)\text{とした}\right)$

$$\begin{aligned} &= 2\times\frac{3+0}{3+1}\left(\sqrt{3},\ 1\right)-\left(\sqrt{3},\ 0\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

である．よって，C' の中心の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ である．