実数 x, y が 2 つの不等式

$$y \geqq 0, \quad y \leqq -x^2+3x-2$$

を同時に満たすとき，$x+2y$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，また，最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(26 立教大 理系 2 月 6 日 1(1))

【答】

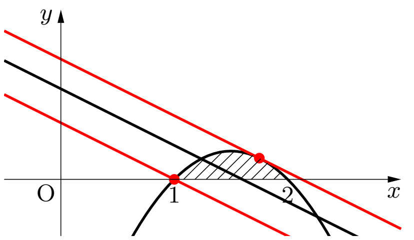
ア	イ
$\dfrac{17}{8}$	1

【解答】

連立不等式

$$(*) \begin{cases} y \geqq 0 \\ y \leqq -x^2+3x-2 \end{cases}$$

が表す領域は右図の斜線部分となる．



$x+2y=k$ …… ① とおくと，実数 x, y が $(*)$ を満たしながら動くときの k のとりうる値の範囲は,「$(*)$ かつ①」を満たす x, y が存在するような k の値の集合であり，それは $(*)$ が表す領域 D と直線 ① が共有点をもつような k の値の範囲である．

よって，$x+2y$ が最大となるのは直線 ① が D と接するときであり，最小となるのは直線 ① が点 $(1,\ 0)$ を通るときである．

直線 ① が D と接するのは

$$-x^2+3x-2=\frac{k-x}{2}$$
$$2(-x^2+3x-2)=k-x$$
$$2x^2-7x+k+4=0$$

が重解をもつときであり

$$(-7)^2-4\cdot 2\cdot(k+4)=0 \qquad \therefore \quad \textbf{最大値 } \boldsymbol{k=\frac{17}{8}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

直線 ① が点 $(1,\ 0)$ を通るのは

$$1+0=k$$

のときであり

$$\textbf{最小値 } \boldsymbol{k=1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．