平面に三角形 ABC と点 P があり,

$$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+6\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

をみたすとき，$\triangle$PAB, $\triangle$PBC, $\triangle$PAC の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする．このとき $S_1:S_2:S_3$ を最も簡単な整数の比で表せ.

(26 札幌医大 1(1))

【答】 $S_1:S_2:S_3=6:4:5$

【解答】

$$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+6\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$$

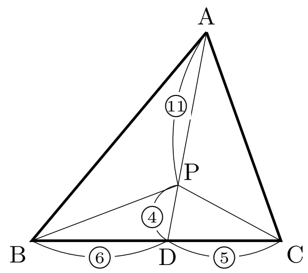
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\frac{1}{4}(5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+6\overrightarrow{\mathrm{PC}})=-\frac{11}{4}\,\frac{5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+6\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{11}$$

辺 BC を $6:5$ に内分する点を D とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-\frac{11}{4}\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ は逆向きだから，P は線分 AD 上の点であり

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}=\frac{11}{4}\qquad \therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|:|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|=11:4$$



である．以上より，右図を得る．

$$S_1=\triangle\mathrm{PAB}=\frac{11}{15}\triangle\mathrm{DAB}=\frac{11}{15}\times\frac{6}{11}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$S_2=\triangle\mathrm{PBC}=\frac{4}{15}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$S_3=\triangle\mathrm{PAC}=\frac{11}{15}\triangle\mathrm{DAC}=\frac{11}{15}\times\frac{5}{11}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって

$$S_1:S_2:S_3=\frac{2}{5}:\frac{4}{15}:\frac{1}{3}=\mathbf{6:4:5}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である.