平面上に，△ABC と点 M がある．

(1) 次の等式を満たす点 P を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MC}} \quad \cdots\cdots ①$$

3 点 A，B，C を図 1 の位置にとる．ただし，図 1 における △ABC は正三角形，六角形 DEFGCA は正六角形である．

- M が A と一致するとき，P は $\boxed{\text{ア}}$ と一致する．
- M が D と一致するとき，P は $\boxed{\text{イ}}$ と一致する．

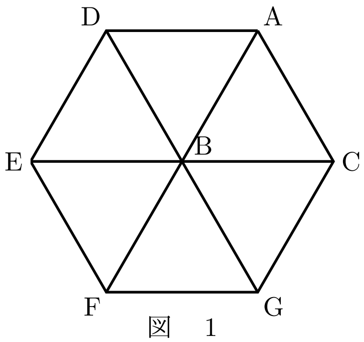


図　1

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

⓪ A	① B	② C	③ D	④ E	⑤ F	⑥ G

(2) $a,\ b,\ c$ を実数とする．次の等式を満たす点 P を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} \quad \cdots\cdots ②$$

花子さんと太郎さんは，(1) の考察から，P の位置について話している．

花子：① は $a = 1,\ b = 2,\ c = -1$ の場合だね．(1) で考えた二つの場合では，M の位置によって P の位置が異なるね．

太郎：でも，$a = 1,\ b = 0,\ c = 0$ の場合だと，② は $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}$ となるから，M がどの位置にあっても，P は A と一致するよ．

花子：P の位置が変わらないのは，どのようなときかな．

ここでは

M がどの位置にあっても，②を満たす P の位置が変わらない

ための $a,\ b,\ c$ の条件を調べよう．

② の両辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと，左辺は

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \boxed{\text{ウ}}$$

となり，右辺は

$$a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} + c\overrightarrow{\mathrm{MC}} = \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

となる．したがって，② は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boxed{\text{ク}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \boxed{\text{ケ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

と変形できる．

よって，M がどの位置にあっても，② を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は $\boxed{\text{コ}}$ である．

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$	① $-\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$	② $\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$	③ $-\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい．)

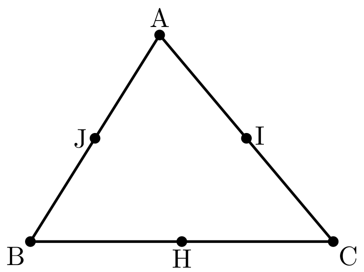
⓪ a	① b	② c
③ $(a+b+c)$	④ $(-a+b+c)$	⑤ $(a-b+c)$
⑥ $(a+b-c)$	⑦ $(-a-b-c)$	⑧ $(1+a+b+c)$
⑨ $(1-a-b-c)$		

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $a=b$	① $b=c$	② $c=a$
③ $a+b-c=0$	④ $a-b+c=1$	⑤ $-a+b+c=-1$
⑥ $a+b+c=0$	⑦ $a+b+c=1$	⑧ $a+b+c=-1$

(3) a, b, c を，$\boxed{\text{コ}}$ を満たす実数とする．様々な条件のもとで，② を満たす点 P が存在する範囲を調べよう．

(i) a, b, c が，$\boxed{\text{コ}}$ と $a = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき，P が存在する範囲は $\boxed{\text{サ}}$ である．ただし，△ABC の辺 BC の中点を H，辺 CA の中点を I，辺 AB の中点を J とする．



参考図

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

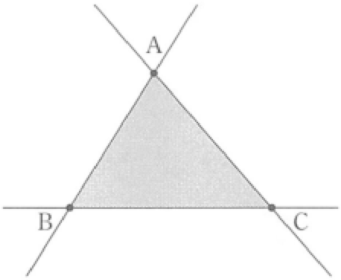
⓪ 直線 AH	① 直線 BI	② 直線 CJ
③ 直線 HI	④ 直線 IJ	⑤ 直線 JH

(ii) $a,\ b,\ c$ が，$\boxed{\text{コ}}$ と $c<0$ を満たすとき，P が存在する範囲を図示すると，

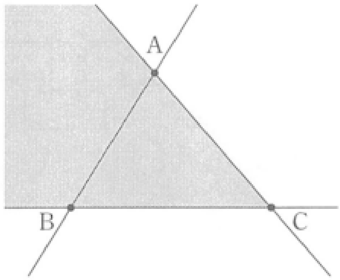
$\boxed{\text{シ}}$ の灰色部分となる．ただし，境界線を含まない．

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ．

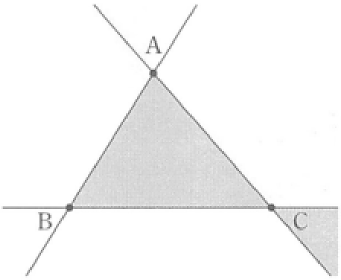
⓪



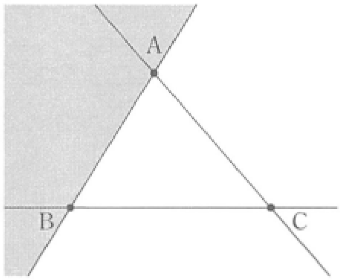
①



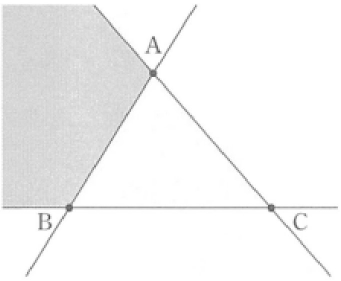
②



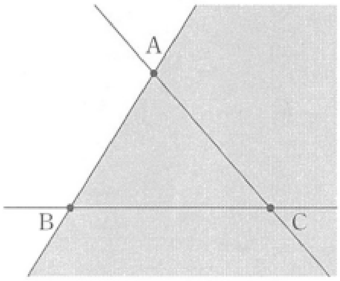
③



④



⑤



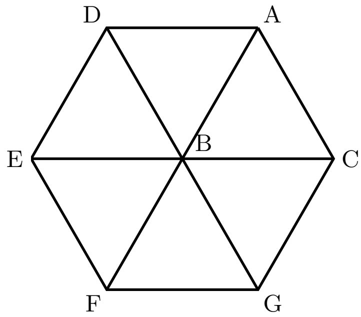
(26 共通テスト 本試験 IIBC 第 6 問)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
4	1	2	1	2	7	1	2	9	7	4	3

【解答】

(1) $$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}} \qquad \cdots\cdots ①$$



- M が A と一致するとき，① は
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\vec{0}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$
であり，P は **E** と一致する．　④　……(答)
- M が D と一致するとき，① は
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DP}}&=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+2\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\&=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DG}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\end{aligned}$$
であり，P は **B** と一致する．　①　……(答)

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}} \qquad \cdots\cdots ②$$

② の両辺を，A を始点とするベクトルを用いて表すと，左辺は
$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}} \quad ②$$
……(答)

となり，右辺は
$$\begin{aligned}&a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+c\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=-a\overrightarrow{\mathrm{AM}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}})\\&=\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\boldsymbol{(-a-b-c)}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad ①,\ ②,\ ⑦\end{aligned}$$
……(答)

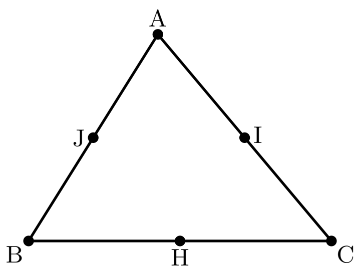
となる．したがって，② は
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(-a-b-c)\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\\therefore\ &\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boldsymbol{c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\boldsymbol{(1-a-b-c)}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad ①,\ ②,\ ⑨\end{aligned}$$
……(答)

と変形できる．

よって，M がどの位置にあっても，② を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は
$$1-a-b-c=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{a+b+c=1} \quad ⑦$$
……(答)

である．

(3) (1) $a,\ b,\ c$ が，$a+b+c=1$ と $a=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき



$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+b+c=1\\\therefore\ &2b+2c=1\end{aligned}$$
であり
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=2b\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+2c\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=2b\overrightarrow{\mathrm{AJ}}+2c\overrightarrow{\mathrm{AI}}\end{aligned}$$
であるから，P が存在する範囲は**直線 IJ** である．　④　……(答)

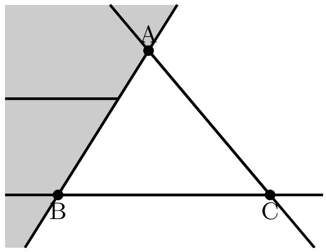
(2) $a,\ b,\ c$ が，$a+b+c=1$ と $c<0$ を満たすとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\\ &= (b+c)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= (1-a)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{BC}}\end{aligned}$$

となる．

a を固定して c を $c<0$ の範囲で動かすとき，P は $(1-a)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の終点を端点とする $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と逆向きの半直線上を動く (端点は除く)．

ついで a を動かす．a は実数全体を動くから，$(1-a)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の終点は直線 AB 上のすべてを動くから，P の存在する範囲は直線 AB を境界とする C を含まない半平面である (境界となる直線 AB は含まない)．



③ ……(答)