平面上の三角形 OAB において $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき，次が成り立つとする．

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{b}|=\sqrt{5},\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$$

ただし，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表す．$s$, $t$ は $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とし，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を D，辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とする．また，線分 AE と線分 BD の交点を F とし，これら 2 つの線分は点 F において直交しているとする．以下の問いに答えよ．

(1) $t$ を $s$ を用いて表せ．また，$s$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ および $s$ を用いて表せ．

(3) 平面上の点 P で

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4$$

を満たすもの全体が半径 3 の円をなすための必要十分条件を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を用いて表せ．また，この必要十分条件が成り立つとき，$s$ の値を求めよ．

(26 東北大 文系 3)

---

【答】

(1) $t=\dfrac{2s-1}{s-5}$，$0<s<\dfrac{1}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{(s+4)s}{2s^2-2s+5}\overrightarrow{a}+\dfrac{(1-s)(1-2s)}{2s^2-2s+5}\overrightarrow{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=0$，$s=\dfrac{2}{7}$

---

【解答】

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{b}|=\sqrt{5},\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$$

(1) D は辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{a}\quad(0<s<1)$$

E は辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{b}\quad(0<t<1)$$

である．2 つ線分 AE，BD は直交するから

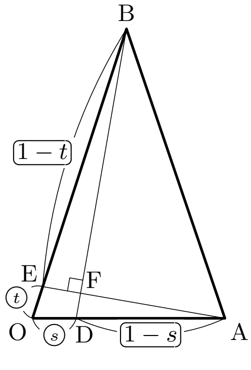
$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$$

$$(t\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})\cdot(s\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=0$$

$$-s|\overrightarrow{a}|^2+(st+1)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}-t|\overrightarrow{b}|^2=0$$

$$\therefore\quad -2s+(st+1)-5t=0$$

$$(s-5)t=2s-1$$




$0<s<1$ であり，$s-5\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{t=\frac{2s-1}{s-5}}\quad\cdots\cdots ①$$

……(答)

である．また，$0<t<1$ であるから，$s$ のとり得る値の範囲は $0<s<1$ のもとで

$$0<\frac{2s-1}{s-5}<1$$

を満たす $s$ の集合である．$s-5<0$ に注意して式を変形すると

$$0>2s-1>s-5 \iff \begin{cases}2s-1<0\\ s>-4\end{cases}\qquad \therefore\quad -4<s<\frac{1}{2}$$

$0<s<1$ とあわせると $\boldsymbol{0<s<\dfrac{1}{2}}$ である．……(答)

(2) $\triangle$OAE と直線 BD でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}} \times \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AO}} \times \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EB}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}} \times \frac{1-s}{1} \times \frac{t}{1-t} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}} = \frac{1-t}{(1-s)t}$$

である．① を代入し，$s$ で表すと

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}} = \frac{1-\dfrac{2s-1}{s-5}}{(1-s)\dfrac{2s-1}{s-5}} = \frac{(s-5)-(2s-1)}{(1-s)(2s-1)} = \frac{s+4}{(1-s)(1-2s)}$$

となる．F は線分 BD を $(s+4):(1-s)(1-2s)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= \frac{(1-s)(1-2s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(s+4)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{(s+4)+(1-s)(1-2s)} \\ &= \frac{(1-s)(1-2s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(s+4)s\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2s^2-2s+5} \\ &= \boldsymbol{\frac{(s+4)s}{2s^2-2s+5}\vec{a}+\frac{(1-s)(1-2s)}{2s^2-2s+5}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(3) $$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4 \qquad \cdots\cdots (*)$$

O を始点にとり $(*)$ を整理すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=4$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2(\vec{b}-\vec{a})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=4$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\vec{a}-\vec{b})|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2+4+2\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\vec{a}-\vec{b})|^2=(2-2\times1+5)+4+2\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\vec{a}-\vec{b})|^2=9+2\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

点 O に関する位置ベクトルが $\vec{a}-\vec{b}$ である点を C とおくと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\vec{a}-\vec{b})|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$$

であり，これは点 C と点 P の距離である．よって，$(*)$ を満たす点 P の全体が半径 3 の円をなすための必要十分条件は

$$9+2\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=3^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OF}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，②, ③ より

$$\left(\frac{(s+4)s}{2s^2-2s+5}\vec{a}+\frac{(1-s)(1-2s)}{2s^2-2s+5}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$(s+4)s\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})+(1-s)(1-2s)\vec{b}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$(s+4)s(1-2)+(1-s)(1-2s)(5-1)=0$$

$$-(s^2+4s)+4(2s^2-3s+1)=0$$

$$7s^2-16s+4=0$$

$$(7s-2)(s-2)=0$$

$0<s<\dfrac{1}{2}$ より　$\boldsymbol{s=\dfrac{2}{7}}$　である．　……(答)