実数 t に対し，3 点 A$(3,\ 0)$，B$(2t+3,\ t)$，C$(4,\ 3)$ を考える．また，直線 l の方程式を $x-2y-3=0$ とする．

(1) 点 A と点 B は直線 l 上の点であることを示せ．
(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を t を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる t の値 t_1 を求めよ．
(3) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の最小値を求めよ．また，その最小値となる t の値 t_2 を求めよ．

(26 室蘭工大 5)

【答】

(1) 略
(2) $t_1=-5t^2+5t$，$t_1=1$
(3) 最小値 $\sqrt{5}$，$t_2=1$

【解答】

$$x-2y-3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① に A$(3,\ 0)$，B$(2t+3,\ t)$ を代入すると

$$\mathrm{A}: 3-0-3=0$$
$$\mathrm{B}: (2t+3)-2t-3=0$$

となり，① を満たすので，点 A と点 B は l 上の点である． ……(証明終わり)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2t,\ t)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(1-2t, 3-t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2t(1-2t)+t(3-t)=\boldsymbol{-5t^2+5t} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となる t の値は

$$t=0,\ 1$$

である．

$t=0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}$ であり，
$t=1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1)\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2)\neq\vec{0}$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となるのは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\neq\vec{0}$ のときであるから，求める t の値 t_1 は

$$\boldsymbol{t_1=1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3)
$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(1-2t)^2+(3-t)^2}$$
$$=\sqrt{5t^2-10t+10}$$
$$=\sqrt{5(t-1)^2+5}$$

であり，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の

最小値は $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ ……(答)

であり，最小値となる t の値 t_2 は

$$\boldsymbol{t_2=1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．