条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=4$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3$ を満たす三角形 ABC において，辺 BC 上の点を P とする．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ であるとき，定数 p, q を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すと，$p=\boxed{\text{オ}}$，$q=\boxed{\text{カ}}$ である．

(26 立教大 理系 2 月 6 日 1(4))

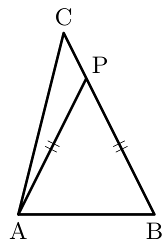
【答】

オ	カ
$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$

【解答】

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=4,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad (p,\ q\ \text{は定数})$$



であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2&=|p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=p^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2pq\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+q^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=9p^2+6pq+16q^2\end{aligned}$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=9(p-1)^2+6(p-1)q+16q^2$$

である．$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ であるから

$$9p^2+6pq+16q^2=9(p-1)^2+6(p-1)q+16q^2$$

$$(-18p+9)-6q=0$$

$$\therefore\quad 6p+2q=3\qquad\cdots\cdots ①$$

である．ここで，P は辺 BC 上の点であるから

$$p+q=1,\ p\geqq 0,\ q\geqq 0$$

を満たす．したがって

$$\begin{cases}6p+2q=3\\p+q=1\end{cases}\qquad \therefore\quad p=\frac{1}{4},\quad q=\frac{3}{4}$$

であり，これらは $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ を満たす．

よって

$$\boldsymbol{p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{4}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．