p を正の実数とする．O を原点とする座標平面上に曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ と曲線 $C_2 : y = -\dfrac{3}{x}$ がある．また，C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の接線を ℓ とおき，ℓ と C_2 の 2 つの共有点を $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とする．ただし，$\mathrm{Q_1}$ の x 座標は正とする．

点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ における C_2 の接線をそれぞれ m_1，m_2 とおき，m_1 と m_2 の交点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ_2}}$ のなす角を θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とする．このとき，以下の問 (i)〜(v) に答えよ．解答欄には，(i)〜(iii) については答えのみを，(iv)，(v) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(i) $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ の座標をそれぞれ p を用いて表せ．

(ii) m_1，m_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ．

(iii) R の座標を p を用いて表せ．

(iv) $t = p^2 + \dfrac{1}{p^2}$ とおく．内積 $\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ_2}}$ を t を用いて表せ．

(v) p がすべての正の実数を動くとき，$\cos\theta$ の最小値とそのときの p の値をそれぞれ求めよ．

(26 立教大 理系 2 月 9 日 2)

【答】

(i) $\mathrm{Q_1}\left(3p,\ -\dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q_2}\left(-p,\ \dfrac{3}{p}\right)$

(ii) $m_1 : y = \dfrac{1}{3p^2}x - \dfrac{2}{p}$，$m_2 : y = \dfrac{3}{p^2}x + \dfrac{6}{p}$

(iii) $\mathrm{R}\left(-3p,\ -\dfrac{3}{p}\right)$

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ_2}} = 12t$

(v) $p = 1$ のとき $\cos\theta$ は最小値 $\dfrac{3}{5}$ をとる．

【解答】

$$C_1 : y = \frac{1}{x}$$

$$C_2 : y = -\frac{3}{x}$$

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおく．

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

であり，C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ $(p > 0)$ における C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{p^2}(x - p) + \frac{1}{p}$$

$$\therefore \quad \ell : y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}$$

である．ℓ と C_2 の 2 つの共有点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ の x 座標は

$$-\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} = -\frac{3}{x}$$

$$x^2 - 2px - 3p^2 = 0$$

$$(x - 3p)(x + p) = 0 \qquad \therefore \quad x = -p,\ 3p$$

である．Q_1 の x 座標は正であるから，Q_1，Q_2 の座標は

$$\mathbf{Q_1}\left(\boldsymbol{3p},\ \boldsymbol{-\frac{1}{p}}\right),\quad \mathbf{Q_2}\left(\boldsymbol{-p},\ \boldsymbol{\frac{3}{p}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) $g(x) = -\dfrac{3}{x}$ とおく．

$$g'(x) = \frac{3}{x^2}$$

であり，C_2 上の点 $\left(t,\ -\dfrac{3}{t}\right)$ におけるの接線の方程式は

$$y = \frac{3}{t^2}(x-t) - \frac{3}{t}$$
$$\therefore\quad \ell : y = \frac{3}{t^2}x - \frac{6}{t}$$

である．よって，点 $\mathrm{Q}_1\left(3p,\ -\dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(-p,\ \dfrac{3}{p}\right)$ における C_2 の接線 m_1，m_2 の方程式はそれぞれ

$$\boldsymbol{m_1 : y = \frac{1}{3p^2}x - \frac{2}{p}}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
$$\boldsymbol{m_2 : y = \frac{3}{p^2}x + \frac{6}{p}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iii) m_1 と m_2 の交点 R の x 座標は

$$\frac{1}{3p^2}x - \frac{2}{p} = \frac{3}{p^2}x + \frac{6}{p}$$
$$\frac{1-9}{3p^2}x = \frac{8}{p} \qquad \therefore\quad x = -3p$$

である．よって，交点 R の座標は

$$\left(\boldsymbol{-3p},\ \boldsymbol{-\frac{3}{p}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(iv) (i)，(iii) より

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ_2}} = \left(6p,\ \frac{2}{p}\right) \cdot \left(2p,\ \frac{6}{p}\right) = 12p^2 + \frac{12}{p^2}$$

であり，$t = p^2 + \dfrac{1}{p^2}$ とおくと

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RQ_2}} = 12t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(v) p がすべての正の実数を動くときの t のとり得る値の範囲は

$$t = p^2 + \frac{1}{p^2} \qquad \therefore\quad p^4 - tp^2 + 1 = 0$$

を満たす $p\ (>0)$ が存在するような t の値の集合である．$q = p^2$ とおき $q^2 - tq + 1 = 0$ が正の解 q をもつための t の条件を求める．$h(q) = q^2 - tq + 1$ とおくとき，$h(0) = 1\ (>0)$ であることに注意すると，t の条件は

$$\begin{cases} \text{判別式} : t^2 - 4 \geqq 0 \\ \text{軸の位置} : \dfrac{t}{2} > 0 \end{cases} \qquad \therefore\quad t \geqq 2$$

である．

θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ は $\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ_2}}$ のなす角であるから

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ_2}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RQ_1}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ_2}}|} = \frac{12t}{\sqrt{36p^2+\dfrac{4}{p^2}}\sqrt{4p^2+\dfrac{36}{p^2}}}\\
&= \frac{12t}{\sqrt{12^2p^4+\dfrac{12^2}{p^4}+36^2+4^2}} = \frac{12t}{\sqrt{12^2\left(p^2+\dfrac{1}{p^2}\right)^2-2\times12^2+1312}}\\
&= \frac{12t}{\sqrt{12^2t^2+1024}} = \frac{12}{\sqrt{12^2+\dfrac{1024}{t^2}}}\\
&\geqq \frac{12}{\sqrt{12^2+\dfrac{1024}{2^2}}}\\
&= \frac{12}{\sqrt{144+256}}\\
&= \frac{12}{\sqrt{400}}\\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

である．等号が成立するのは

$$t=2 \quad \text{すなわち} \quad p^4-2p^2+1=0$$
$$(p^2-1)^2=0 \qquad \therefore \quad p=1\ (>0)$$

のときである．

よって，$\cos\theta$ は

$$\boldsymbol{p=1}\ \textbf{のとき，最小値}\ \boldsymbol{\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- 数学 III の微分を利用して t の値域を求めてもよい．

  $$t' = 2p-\frac{2}{p^3} = \frac{2(p^4-1)}{p^3} = \frac{2(p+1)(p-1)(p^2+1)}{p^3}$$

  であり，$p>0$ においては $p=1$ で t は極小かつ最小となり，最小値は 2 である．さらに，t は $p>0$ において連続であり $\displaystyle\lim_{p\to\infty} t=\infty$ であるから，t の値域は

  $$t \geqq 2$$

  である．
- 相加平均・相乗平均の関係により

  $$t = p^2+\frac{1}{p^2} \geqq 2\sqrt{p^2\times\frac{1}{p^2}} = 2 \quad (\text{等号成立は } p=1(>0) \text{ のとき})$$

  であり，これは t の最小値が 2 であることを示している．$\cos\theta$ が最小となるのは t が最小となるときであるから，$\cos\theta$ は $p=1$ のとき最小となる．