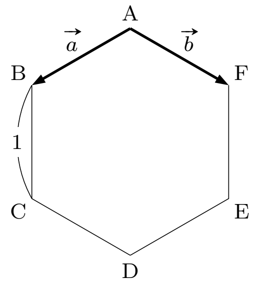
　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，線分 CD を $1:2$ に内分する点を P とする．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とする．以下の問いに答えよ．



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の大きさを求めよ．
(5) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．
(6) $\triangle$ABP の面積 S を求めよ．

(26 豊橋技科大 2)

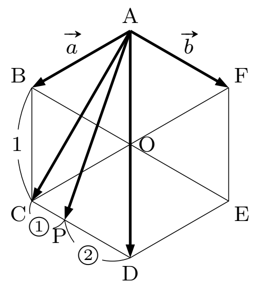
【答】

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\vec{a}+2\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{a}+\vec{b}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\vec{a}+\dfrac{4}{3}\vec{b}$
(4) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$
(5) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$
(6) $S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】

(1)
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos120^\circ=\boldsymbol{-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
である．

(2) 正六角形 ABCDEF の中心を O とおくと
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\boldsymbol{2\vec{a}+2\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
である．また
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\\&=\boldsymbol{2\vec{a}+\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$
である．



(3) P は線分 CD を $1:2$ に内分する点であるから
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{3}\\&=\frac{2}{3}(2\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}) \quad (\because\ (2))\\&=\boldsymbol{2\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$
である．

(4) (3) より

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| &= \left|2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right| \\
&= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + \frac{16}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2} \\
&= \sqrt{4 + \frac{16}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{16}{9}} \quad (\because\ (1)) \\
&= \sqrt{\frac{36 - 24 + 16}{9}} \\
&= \boldsymbol{\frac{2\sqrt{7}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.

(5) θ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角であるから

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} \\
&= \frac{\vec{a}\cdot\left(2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right)}{1 \times \frac{2\sqrt{7}}{3}} \quad (\because\ (3),\ (4)) \\
&= \left\{2 + \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \times \frac{3}{2\sqrt{7}} \quad (\because\ (1)) \\
&= \frac{2}{\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

$0^\circ < \theta < 60^\circ$ であるから

$$
\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

である.

(6) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 S は

$$
S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\sin\theta = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2\sqrt{7}}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

である.