原点を O とする座標平面上に，3 点 A(1, 2)，B(4, -1)，C(0, 4) がある．また，点 A，B，C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 直線 AB 上に点 P をとり，点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とする．$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$ を満たす点 P の座標を求めよ．
(2) 点 C から直線 AB におろした垂線を CH とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を求めよ．
(3) 点 C と直線 AB の距離を求めよ．

(26 鳥取大 地域・医 (看)・農 (生) 4)

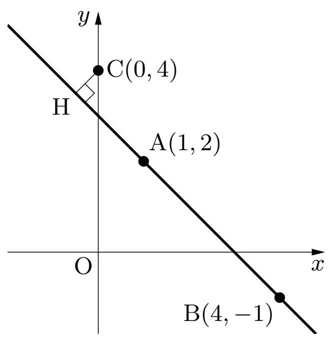
【答】

(1) (3, 0)

(2) $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】



(1) P は直線 AB 上の点であるから，P の位置ベクトル $\vec{p}$ は実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(1,\ 2)+t(3,\ -3)\end{aligned}$$

と表すことができる．$\vec{p}$ は $\vec{p}\cdot\vec{c}=0$ を満たすから

$$\{(1,\ 2)+t(3,\ -3)\}\cdot(0,\ 4)=0$$

$$8-12t=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{2}{3}$$

である．

$$\vec{p}=(1,\ 2)+\frac{2}{3}(3,\ -3)=(3,\ 0)$$

であり，P の座標は

P(3, 0) ……(答)

である．

- xy 平面上で C(0, 4) は y 軸上の点であるから，$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$ を満たす点 P($\vec{p}$) は x 軸上の点である．P は直線 AB 上の点でもあるから，P は直線 AB と x 軸との交点である．
  直線 AB の方程式は

  $$y=\frac{-1-2}{4-1}(x-1)+2 \qquad \therefore \quad y=-x+3$$

  であるから，P の座標は

  P(3, 0)

  である．

(2) H は点 C から直線 AB に下した垂線の足であるから，実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(1,\ 2)+u(3,\ -3)\end{aligned}$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$\{(1,\ 2)+u(3,\ -3)-(0,\ 4)\}\cdot(3,\ -3)=0$$
$$\{(1,\ -2)+u(3,\ -3)\}\cdot(3,\ -3)=0$$
$$(3+6)+(9+9)u=0 \qquad \therefore\quad u=-\frac{1}{2}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(1,\ -2)-\frac{1}{2}(3,\ -3)=\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{(-1,\ 2)\cdot(3,\ -3)}{3^2+(-3)^2}(3,\ -3)\\&=\frac{-3-6}{18}(3,\ -3)=-\frac{3}{2}(1,\ -1)\end{aligned}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{3}{2}(1,\ -1)-(-1,\ 2)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

である．

(3) 点 C と直線 AB の距離は線分 CH の長さであるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 点 C$(0,\ 4)$ と直線 AB : $x+y-3=0$ の距離は

$$\frac{|0+4-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．