O を原点とする座標空間に 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2,\ 3)$ をとる．実数 h は $h>3$ を満たすとし，点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ h)$ をとる．3 点 C，P，Q を通る平面を α とする．さらに，α と x 軸との交点を A，α と y 軸との交点を B とおく．四面体 OABC の体積を V とする．次の問いに答えよ．

(1) A の x 座標を h を用いて表せ．

(2) V を h を用いて表せ．

(3) h が $h>3$ を満たす実数全体を動くとき，V の最小値を求めよ．

(26 北海道大 理系 4)

【答】

(1) $\dfrac{h}{h-3}$

(2) $V=\dfrac{h^3}{3(h-3)^2}$

(3) $\dfrac{27}{4}$

【解答】

(1) 3 点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ h)$，$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2,\ 3)$ を通る平面 α 上の点を X とおくと，X は

$$s+t+u=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす実数 $s,\ t,\ u$ を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}}&=s(0,\ 0,\ h)+t(1,\ 0,\ 3)+u(0,\ 2,\ 3)\\&=(t,\ 2u,\ hs+3t+3u)\end{aligned}$$

と表すことができる．

A は α と x 軸との交点であるから

$$① \text{ かつ } \begin{cases}2u=0\\hs+3t+3u=0\end{cases} \iff \begin{cases}u=0\\hs+3t=0\\s+t=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{3-h},\ t=\frac{h}{h-3},\ u=0$$

である．よって，A の x 座標 t は

$$\boldsymbol{\frac{h}{h-3}} \quad \text{であり，} \mathrm{A}\left(\frac{h}{h-3},\ 0,\ 0\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) B は α と y 軸との交点であるから

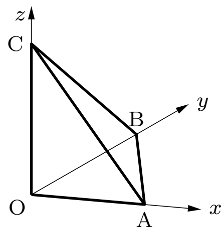
$$① \text{ かつ } \begin{cases}t=0\\hs+3t+3u=0\end{cases} \iff \begin{cases}t=0\\hs+3u=0\\s+u=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad s=\frac{3}{3-h},\ t=0,\ u=\frac{h}{h-3}$$

である．よって，B の y 座標 $2u$ は

$$\frac{2h}{h-3} \quad \text{であり，} \mathrm{B}\left(0,\ \frac{2h}{h-3},\ 0\right)$$

である．四面体 OABC の体積 V は



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\,\frac{h}{h-3}\,\frac{2h}{h-3} \times h \quad (\because\ h > 3) \\ &= \boldsymbol{\frac{h^3}{3(h-3)^2}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(3) 微分すると

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3}\,\frac{3h^2 \times (h-3)^2 - h^3 \times 2(h-3)}{(h-3)^4} \\ &= \frac{3h^2(h-3) - 2h^3}{3(h-3)^3} \\ &= \frac{h^2(h-9)}{3(h-3)^3} \end{aligned}$$

$h > 3$ における V の増減は下表となる．

h	(3)	$\cdots$	9	$\cdots$
V'		$-$	0	$+$
V		$\searrow$		$\nearrow$

よって，V は $h = 9$ のとき

最小値 $\displaystyle \frac{9^3}{3(9-3)^2} = \frac{3^6}{2^2 \times 3^3} = \boldsymbol{\frac{27}{4}}$ ……(答)

をとる．