原点を O とする座標空間において，z 座標が正である点 A と 2 点 B(2, 0, 0)，C(0, 1, 0) があり，点 A は条件

$$\mathrm{OA}=2,\quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$$

を満たしている．線分 OC を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．ただし，s, t はそれぞれ $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする．このとき，次の問 (1)〜(6) に答えよ．解答欄には，(1)，(4)，(5) については答えのみを，(2)，(3)，(6) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の値をそれぞれ求めよ．
(2) A の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，x, y, z の値をそれぞれ求めよ．ただし，z は正の実数である．
(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の成分表示を s, t を用いて表せ．
(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が直交するとき，s を t を用いて表せ．
(5) (4) のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ を t を用いて表せ．
(6) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，三角形 OCQ の面積の最小値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

(26 立教大 文系 2 月 9 日 3)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$
(2) $x=1,\ y=1,\ z=\sqrt{2}$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(1+t,\ 1-t-s,\ \sqrt{2}(1-t)\right)$
(4) $s=1-t$
(5) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=3t^2-2t+3$
(6) $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【解答】

$$\mathrm{OA}=2,\quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60^\circ \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) B(2, 0, 0)，C(0, 1, 0) より $\mathrm{OB}=2$, $\mathrm{OC}=1$ であり，A は $(*)$ を満たすから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\times2\times\cos60^\circ=\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\times1\times\cos60^\circ=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) A の座標を $(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とするとき，(1) より

$$\begin{cases}(x,\ y,\ z)\cdot(2,\ 0,\ 0)=2\\(x,\ y,\ z)\cdot(0,\ 1,\ 0)=1\end{cases} \qquad \therefore\quad \begin{cases}2x=2\\y=1\end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=1,\ y=1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

さらに $\mathrm{OA}=2$ であるから

$$\sqrt{1^2+1^2+z^2}=2 \qquad \therefore\quad z^2=2$$

$z>0$ より

$$z=\boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) P は線分 OC を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ s,\ 0)$$

であり，Q は線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\left(1-t,\ 1-t,\ \sqrt{2}(1-t)\right)+(2t,\ 0,\ 0)\\&=\left(1+t,\ 1-t,\ \sqrt{2}(1-t)\right)\end{aligned}$$

である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\left(1+t,\ 1-t-s,\ \sqrt{2}(1-t)\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が直交するとき

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$

$$\left(1+t,\ 1-t-s,\ \sqrt{2}(1-t)\right)\cdot(0,\ 1,\ 0)=0$$

$$1-t-s=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{s=1-t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

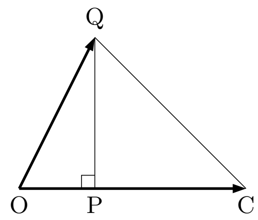
(5) (4) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=(1+t)^2+0^2+2(1-t)^2\\&=\boldsymbol{3t^2-2t+3}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(6) 三角形 OCQ の面積を S とおく．

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times\mathrm{OC}\times(\text{Q から OC に下した垂線の長さ})\\&=\frac{1}{2}\times\mathrm{OC}\times\mathrm{PQ}\quad(\because\ (4))\\&=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3t^2-2t+3}\quad(\because\ (5))\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3t^2-2t+3}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}}\end{aligned}$$



であり，S は

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}\ \textbf{のとき，最小値}\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

- (4)，(5) を無視するなら

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t)^2\}-\{0+(1-t)+0\}^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(1+t)^2+2(1-t)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3t^2-2t+3}\end{aligned}$$

である．以下，【解答】と同じ．