O を原点とする座標空間において，2 点 A$(3,\ 2,\ 1)$，B$(0,\ -1,\ 4)$ を通る直線に，O から垂線 OH を下ろす．このとき，点 H の座標は $\boxed{\ エ\ }$ である．

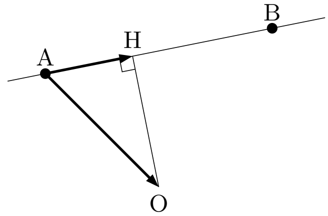
(26 立教大 理系 2 月 9 日 1(3))

【答】

エ
$\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

【解答】

H は直線 AB 上の点であるから実数 t を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (3,\ 2,\ 1) + t\{(0,\ -1,\ 4) - (3,\ 2,\ 1)\} \\ &= (3,\ 2,\ 1) + t(-3,\ -3,\ 3)\end{aligned}$$

と表すことができる．$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \{(3,\ 2,\ 1) + t(-3,\ -3,\ 3)\} \cdot (-3, -3, 3) \\ &= (-9 - 6 + 3) + t(9 + 9 + 9) \\ &= -12 + 27t\end{aligned}$$

であるから

$$-12 + 27t = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{4}{9}$$

であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (3,\ 2,\ 1) + \frac{4}{9}(-3,\ -3,\ 3) \\ &= \left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)\end{aligned}$$

である．点 H の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)}$ である． ……(答)

- $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (\because\ \text{正射影ベクトルの公式}) \\ &= (3,\ 2,\ 1) + \frac{(-3,\ -2,\ -1) \cdot (-3,\ -3,\ 3)}{9 + 9 + 9}(-3,\ -3,\ 3) \\ &= (3,\ 2,\ 1) + \frac{9 + 6 - 3}{27}(-3,\ -3,\ 3) \\ &= (3,\ 2,\ 1) + \frac{4}{3}(-1,\ -1,\ 1) \\ &= \left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)\end{aligned}$$

である．点 H の座標は $\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}\right)$ である．