一辺の長さが 1 の正四面体 OABC に対し，線分 OA を 1 : 2 に内分する点を P, 線分 AB を 3 : 1 に内分する点を Q，線分 PQ を 1 : 3 に内分する点を R とする．また，点 R から直線 OC に下ろした垂線と直線 OC の交点を H とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}\boxed{26}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{27}}{\boxed{28}\boxed{29}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\boxed{30}}{\boxed{31}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{RH}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{32}\boxed{33}}}{\boxed{34}\boxed{35}}$

(4) $\triangle$OCR の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{36}\boxed{37}}}{\boxed{38}\boxed{39}}$ である．

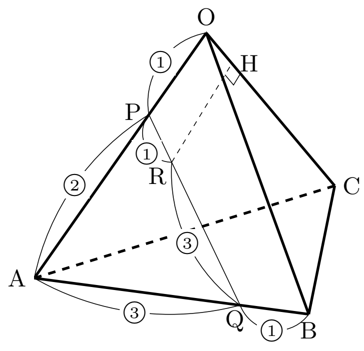
(26 青山学院大 全学部 理系 3)

【答】

24	2526	27	2829	30	31	3233	3435	3637	3839
5	16	3	16	1	4	33	16	33	32

【解答】

(1) R は線分 PQ を 1 : 3 に内分する点であり，P は線分 OA を 1 : 2 に内分する点，Q は線分 AB を 3 : 1 に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{4}\\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \frac{1}{4}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\\ &= \boldsymbol{\frac{5}{16}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boldsymbol{\frac{3}{16}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2) H は直線 OC 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表すことができ，$\overrightarrow{\mathrm{RH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．四面体 OABC は一辺の長さが 1 の正四面体であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 1\times1\times\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

が成り立つ．① は

$$\left\{k\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \left(\frac{5}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$$

$$k - \frac{5}{16}\times\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore\quad k = \frac{1}{4}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\left(\frac{5}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{16}\times\frac{1}{2}}{1^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RH}}| &= \left|\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{5}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{3}{16}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \\ &= \frac{1}{16}|4\overrightarrow{\mathrm{OC}}-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{4^2+5^2+3^2-2(20-15+12)\times\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{16}\sqrt{50-17} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{33}}{16}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(4) △OCR の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{RH}}| = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{33}}{16} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{33}}{32}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．