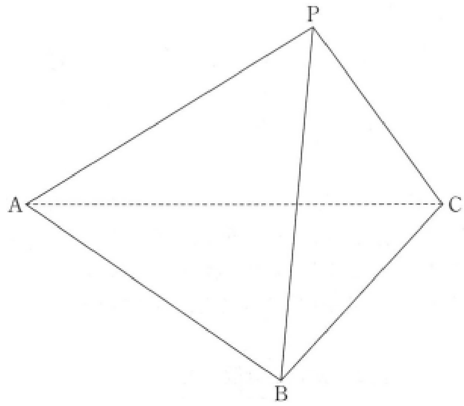
空間内に，$AB = AC = 10$，$BC = 12$ である二等辺三角形 ABC がある．△ABC の内心を I とし，△IBC の重心を G とする．G を通り，△ABC を含む平面と垂直な直線上に，G と異なる点 P がある．このとき，△ABC を底面とする三角錐PABC について考えよう．



参考図

直線 AI と辺 BC の交点を D とし，また，辺 PA 上の点 E は，$\angle PED = \angle PID$ を満たしているとする．なお，以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ．

(1) 直線 BI が $\boxed{\text{ア}}$ ことに注意すると，△ABD において線分 AI と ID の長さの比を求めることができる．よって，線分 AD の長さに着目すると

$$AI = \boxed{\text{イ}},\quad ID = \boxed{\text{ウ}}$$

であることがわかる．また，4 点 E，I，D，$\boxed{\text{エ}}$ は同一円周上にある．
よって

$$AE \cdot AP = \boxed{\text{オカ}}$$

であることがわかる．

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ 直線 AC と垂直に交わる
① 直線 AC とねじれの位置にある
② $\angle ABC$ を 2 等分する
③ 辺 AC の中点を通る

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ A	① B	② C	③ G	④ P

(2) 線分 PI と DE の交点を F とする．このとき，線分 IF と FP の長さの比と，三角錐 PABC の体積との関係について考えよう．

(i) 次の**仮定 1** のもとで三角錐 PABC の体積 V_1 について考える．

仮定 1

線分 IF と FP の長さの比が $\mathrm{IF} : \mathrm{FP} = 3 : 2$ である．

このとき

$$\mathrm{PE} : \mathrm{EA} = \boxed{\text{キ}} : \boxed{\text{ク}}$$

であるから，(1) での考察に注意すると，$\mathrm{AP} = \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ となる．

したがって，直線 PG が △ABC を含む平面に垂直であることに注意すると，$V_1 = \boxed{\text{サシ}}$ であることがわかる

(ii) (i) の**仮定 1** の代わりに次の**仮定 2** をおき，三角錐 PABC の体積の変化について考える．

仮定 2

線分 IF と FP の長さの比が $\mathrm{IF} : \mathrm{FP} = 1 : 3$ である．

仮定 2 のもとでの三角錐 PABC の体積 V_2 を，(i) で求めた V_1 と比較すると，V_2 と V_1 の比は

$$V_2 : V_1 = \boxed{\text{ス}} : \boxed{\text{セ}}$$

であるから，$\boxed{\boxed{\text{ソ}}}$．

$\boxed{\boxed{\text{ソ}}}$ の解答群

⓪ V_2 は V_1 より小さい
① V_2 と V_1 は等しい
② V_2 は V_1 より大きい

(26 共通テスト 本試験 I・A 第 3 問)

【答】	ア	イ	ウ	エ	オカ	キ	ク	ケ	コ	サシ	ス	セ	ソ
	2	5	3	4	40	1	4	5	2	16	6	1	2

【解答】

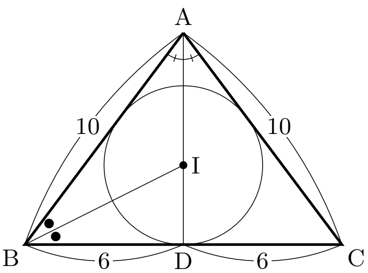
(1) I は $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 10$，$\mathrm{BC} = 12$ である二等辺三角形 ABC の内心であるから，直線 AI と辺 BC の交点 D は辺 BC の中点である．

直線 BI が

∠ABC を 2 等分する ② ……(答)

ことに注意すると

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{AB} : \mathrm{BD} = 10 : 6 = 5 : 3$$



である．また，AD ⊥ BC であるから三平方の定理より

$$\mathrm{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

であり

$$\mathrm{AI}=\frac{5}{5+3}\mathrm{AD}=\frac{5}{8}\cdot 8=\mathbf{5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

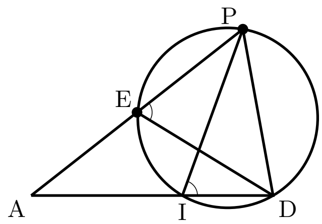
$$\mathrm{ID}=\mathrm{AD}-\mathrm{AI}=8-5=\mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．

また，I は線分 AD 上の点であり，4 点 P，A，I，D は同一平面上にある．辺 PA 上の点 E もこの平面上にある．さらに，点 E は ∠PED = ∠PID を満たしているから円周角の定理の逆により

4 点 E，I，D，**P** は同一円周上 ④

にある．よって，方べきの定理より



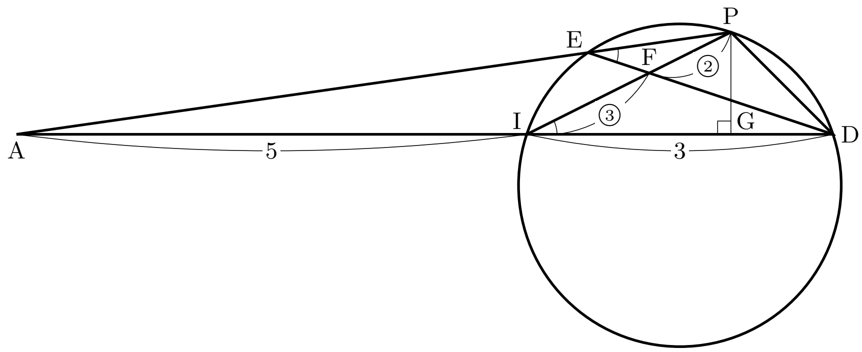
$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AI}\cdot\mathrm{AD}=5\cdot(5+3)$$
$$=\mathbf{40} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) 仮定 1 より，正の実数 k_1 を用いて

$$\mathrm{IF}=3k_1,\quad \mathrm{FP}=2k_1$$

と表すことができる．



△PAI と直線 ED でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}}\cdot\frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}}=1$$

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{5+3}{3}\cdot\frac{3k_1}{2k_1}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{PE}:\mathrm{EA}=\mathbf{1:4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であるから，$\mathrm{AE}=\dfrac{4}{5}\mathrm{AP}$ であり，① より

$$\frac{4}{5}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AP}=40$$

$$\mathrm{AP}^2=50 \qquad \therefore\quad \mathrm{AP}=\mathbf{5\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

次に，三角錐 PABC の体積 V_1 を求める．

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48$$

直線 PG が △ABC を含む平面に垂直であるから，三角錐 PABC の高さは PG である．G は △IBC の中線 ID を 2 : 1 に内分するから

$$\mathrm{AG} = \mathrm{AI} + \mathrm{IG} = 5 + \frac{2}{3}\mathrm{ID} = 5 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 7$$

である．$h_1 = \mathrm{PG}$ とおくと

$$h_1 = \sqrt{\mathrm{AP}^2 - \mathrm{AG}^2} = \sqrt{50 - 7^2} = 1$$

であり

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 1 = \mathbf{16}$$ ……(答)

である．

(ii) 仮定 1 と仮定 2 のもとでは底面となる △ABC は変わらないから，体積の比は高さの比と一致する．

仮定 2 より，正の実数 k_2 を用いて

$$\mathrm{IF} = k_2, \quad \mathrm{FP} = 3k_2$$

と表すことができる．

(i) と同じく，△PAI と直線 ED でメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DI}} \cdot \frac{\mathrm{IF}}{\mathrm{FP}} = 1$$

$$\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{5+3}{3} \cdot \frac{k_2}{3k_2} = 1$$

$$\therefore \quad \mathrm{PE} : \mathrm{EA} = \mathbf{9 : 8}$$ ……(答)

であるから，$\mathrm{AE} = \dfrac{8}{17}\mathrm{AP}$ であり，① より

$$\frac{8}{17}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AP} = 40$$

$$\therefore \quad \mathrm{AP}^2 = 85$$

である．仮定 2 のときの高さを h_2 とおくと

$$h_2 = \sqrt{85 - 7^2} = \sqrt{36} = 6$$

であり

$$V_2 : V_1 = h_2 : h_1 = 6 : 1$$

であるから

V_2は V_1より大きい ② ……(答)

ことがわかる．