正三角形 ABC を底面とする三角錐 OABC がある．OA = OB = OC であり，正三角形 ABC の 1 辺の長さと三角錐の高さの和が 1 であるという．

(1) 三角錐 OABC の体積 V が最大となるのは $\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{20}}{\boxed{21}}$ のときであり，そのとき

$$V = \frac{\sqrt{\boxed{22}}}{\boxed{23}\boxed{24}}$$

である．

(2) OA が最小となるのは $\mathrm{AB} = \dfrac{\boxed{25}}{\boxed{26}}$ のときであり，そのとき

$$\mathrm{OA} = \frac{\boxed{27}}{\boxed{28}}, \quad \cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\boxed{29}\boxed{30}}{\boxed{31}}$$

である．

(26 青山学院大 全学部 文系 3)

【答】

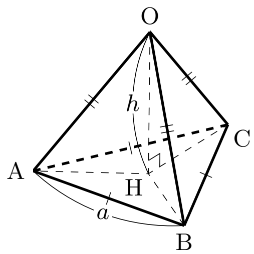
20	21	22	2324	25	26	27	28	2930	31
2	3	3	81	3	4	1	2	-1	8

【解答】

正三角形 ABC の 1 辺の長さを a，O から平面 ABC に下した垂線の長さを h とおくと

$$a + h = 1 \quad (a > 0,\ h > 0) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．



(1) 三角錐 OABC の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ\cdot h \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}a^2(1-a) \quad (\because\ ①より\ 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である．

$$V' = \frac{\sqrt{3}}{12}(2a - 3a^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}a(2-3a)$$

$0 < a < 1$ での V の増減は下表となる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
V'	(0)	$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，V は

$$a = \mathbf{\frac{2}{3}}\ のとき，最大値\ \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right) = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{81}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

をとる．

(2) O から平面 ABC に下した垂線の足を H とおくと，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ より，H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であるから H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心でもある．

$$\begin{aligned}
\mathrm{OA} &= \sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{OH}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\cdot a\sin 60^\circ\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + (1-a)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4}{3}a^2 - 2a + 1} \\
&= \sqrt{\frac{4}{3}\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

であるから，OA が最小になるのは

$$\mathrm{AB} = a = \boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

のときであり，このとき

$$\mathrm{OA} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{9}{16}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{-1}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．