2　順列・組合せ

2.1　重複順列，順列

問題

227 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 を用いてつくられる 3 桁の整数のうち，5 の倍数になる整数の個数を N とする。同じ数字を重複して用いてよい場合は $N = \boxed{}$ で，重複を許さない場合は $N = \boxed{}$ である。

（大阪電気通信大）

228 6 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 から重複を許して 4 個を取り出し，それらを並べて 4 桁の整数をつくる。千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，d とおく。次のような整数は，それぞれ何通りできるか。

(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$

（佐賀大）

229 7 個の数字 1，2，3，4，5，6，7 のうちの異なる 4 個の数字でできる 4 桁の整数の個数は $\boxed{}$ であり，そのうち奇数であるものの個数は $\boxed{}$ である。

（神奈川工科大）

230 0，1，2，3，4 の 5 個の数字のうち異なる数字を使って 3 桁の偶数をつくると $\boxed{}$ 通りできる。

（福岡歯科大）

231 7 個の数字 0，2，3，4，5，6，7 の中の異なる数字を使ってできる 3 桁の整数のうち，3 の倍数は $\boxed{}$ 個ある。

（中京大）

チェック・チェック

227 使う数字の重複を許す場合と許さない場合をセットにした問題です。どちらも積の法則を用いて説明できますが，結論をまとめておくと

重複順列：異なる n 個のものから，くり返し用いることを許して r 個をとって並べた順列の総数は n^r 通り

順列：異なる n 個のものから，r 個をとって並べた順列の総数は

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \text{ 通り}$$

これは ${}_n\mathrm{P}_r$ と表され，${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n\,!}{(n-r)!}$ ともかけますね。

最高位に 0 は使えないことにも注意しましょう。

228 (1) a，d とは独立に b，c はどの数字を使ってもよいので，求める場合の数は

（a，d の場合の数）×（b の場合の数）×（c の場合の数）

です。

(2) $a<b<c<d$ のときと $a<b=c<d$ のときに分けて数えましょう。$a<b<c<d$ のとき，使う 4 つの数字が選ばれると，大小は自動的に定まります。

229 異なる 7 個の数字の中から 4 個をとってきて並べると 4 桁の整数をつくることができます。また，奇数となるのは一の位が奇数 1，3，5，7 のときです。

230 偶数となるのは一の位が偶数 0，2，4 のときです。最高位に 0 は使えないことにも注意しましょう。

231 3 の倍数であるかないかをどう判断しますか？3 桁の整数を

$$N = a\times 10^2 + b\times 10 + c \ (0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 9,\ a \neq 0)$$

とするとき

$$N \text{ が 3 の倍数} \iff a+b+c \text{ が 3 の倍数}$$

ですが，証明できますか。次の変形をすればわかりますね。

$$\begin{aligned} N &= a\times(9+1)^2 + b\times(9+1) + c \\ &= 9\times(\text{整数}) + a + b + c \end{aligned}$$

解答・解説

227 同じ数字を重複して用いてよい場合，3 桁の 5 の倍数は**一の位**が 0 か 5 のどちらかであり，**百の位**は 0 を除く 5 つのいずれか，**十の位**は 6 つのいずれでもよいから

$N = 2 \times 5 \times 6 = \underline{\mathbf{60}\text{（個）}}$

重複を許さない場合は，**一の位が 0 か 5 かで場合分けする。**

(i) 一の位が 0 のときは百の位が 1〜5 の 5 通り，十の位が残りの 4 通りであり

$5 \times 4 = 20$（個）

(ii) 一の位が 5 のときは百の位が 1〜4 の 4 通りで，十の位は 5 と百の位の数を除く残り 4 通りだから

$4 \times 4 = 16$（個）

したがって，重複を許さない場合の N は

$N = 20 + 16 = \underline{\mathbf{36}\text{（個）}}$

228 (1) **$a = 1$ のとき**，$d = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の 5 通りあり，同様に，**$a = 2$ のとき**は d が 4 通り，**$a = 3$ のとき**は d が 3 通り，**$a = 4$ のとき**は d が 2 通り，**$a = 5$ のとき**は d が 1 通りである。b，c はいずれの場合もそれぞれ 6 通りであるから

$$\begin{aligned} &5 \times 6 \times 6 + 4 \times 6 \times 6 + 3 \times 6 \times 6 + 2 \times 6 \times 6 + 1 \times 6 \times 6 \\ &= (5 + 4 + 3 + 2 + 1) \times 6 \times 6 \\ &= \underline{\mathbf{540}\text{（通り）}} \end{aligned}$$

(2) $a < b < c < d$ となる整数は **6 個の数字から異なる 4 個を選び小さい順に並べればよい**ので，${}_6\mathrm{C}_4$ 通り。

$a < b = c < d$ となる整数は **6 個の数字から異なる 3 個を選び，小さい順に並べ，まん中の数字を 2 回使えばよい**ので，${}_6\mathrm{C}_3$ 通りある。

以上より

$${}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 + 20 = \underline{\mathbf{35}\text{（通り）}}$$

229 7 個の数から 4 個取り出してできる整数は

${}_7\mathrm{P}_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \underline{\mathbf{840}\text{（個）}}$

そのうち**奇数となるのは，一の位が 1，3，5，7 のいずれかのとき**であり，他の位は残りの 6 個の中から 3 個取り出して並べればよいから

$4 \times {}_6\mathrm{P}_3 = 4 \times 6 \times 5 \times 4 = \underline{\mathbf{480}\text{（個）}}$

230 **偶数となるのは一の位が 0，2，4 のとき**である。

一の位が 0 のとき，百の位は 1〜4 の 4 通り，十の位は残り 3 通りであるから

$1 \times 4 \times 3 = 12$（通り）

一の位が 2 または 4 のとき，百の位は 0 を除くので 3 通り，十の位は 0 を含めた残り 3 通りであるから

$2 \times 3 \times 3 = 18$（通り）

$\therefore\quad 12 + 18 = \underline{\mathbf{30}}$**（通り）**

231 **3 の倍数は各位の数字の和が 3 の倍数**であればよい。

$x < y < z$ としたとき，和が 3 の倍数となる 3 つの数の組 $\{x,\ y,\ z\}$ は

$\{0,\ 2,\ 4\}$，$\{0,\ 2,\ 7\}$，$\{0,\ 3,\ 6\}$，$\{0,\ 4,\ 5\}$，$\{0,\ 5,\ 7\}$，
$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 7\}$，$\{2,\ 4,\ 6\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，
$\{3,\ 4,\ 5\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$，
$\{4,\ 5,\ 6\}$，
$\{5,\ 6,\ 7\}$

の 13 通りあり，0 を含むものは 5 通り，0 を含まないものは 8 通りある。0 を含むときは百の位に 0 はこないので

$2 \cdot 2! \times 5 + 3! \times 8 = \underline{\mathbf{68}}$**（個）**

別解　7 個の数字 0，2，3，4，5，6，7 を 3 でわった余りで分類すると

余りが 0 の数の集合　　$A_0 = \{0,\ 3,\ 6\}$
余りが 1 の数の集合　　$A_1 = \{4,\ 7\}$
余りが 2 の数の集合　　$A_2 = \{2,\ 5\}$

であり，異なる数字を使ってできる 3 桁の整数が 3 の倍数となるのは

(i) A_0 の 3 つの数字で 3 桁の整数をつくる
(ii) A_0，A_1，A_2 から 1 つずつ数字を選び 3 桁の整数をつくる

のいずれかである。最高位（百の位）に 0 がこないことに注意すると

(i)　$2 \times 2 \times 1 = 4$（通り）

(ii) (ア) A_0 から 0 を選ぶとき

A_0，A_1，A_2 の並び方が　　$2 \times 2 = 4$（通り）
A_1，A_2 からの数字の選び方が　　$2 \times 2 = 4$（通り）
$\therefore\quad 4 \times 4 = 16$（通り）

(イ) A_0 から 0 以外を選ぶとき

A_0，A_1，A_2 の並び方が　　$3! = 6$（通り）
A_0，A_1，A_2 からの数字の選び方が　　$2 \times 2 \times 2 = 8$（通り）
$\therefore\quad 6 \times 8 = 48$（通り）

よって，(ii) をみたすのは　　$16 + 48 = 64$（通り）

(i)，(ii) を合わせると　　$4 + 64 = 68$（個）