問題

対数不等式

213 (1) 不等式

$$2\log_2(x-3) < \log_2 4x$$

をみたす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。（神奈川大）

(2) 不等式

$$\log_2(x+2) \leqq 1 + \log_4(x+3)$$

をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。（愛知工業大）

214 (1) 不等式

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。（帝京大）

(2) 不等式

$$\log_{\frac{1}{4}}(2+x) - 1 \leqq \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

を解け。（岡山理科大）

215 不等式

$$2\log_a(x-3) > \log_a(x-1) \quad （ただし，a > 0，a \neq 1 とする）$$

の解は $\boxed{}$ である。（昭和薬科大）

チェック・チェック

対数不等式

対数不等式を解くには，まず**真数条件（真数 > 0 ……①）**をおさえておき，与えられた不等式を

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

の形に整理します。あとは**底 a の範囲に注意**して

(i) $a > 1$ のとき，$f(x) > g(x)$

(ii) $0 < a < 1$ のとき，$f(x) < g(x)$

を ① の条件のもとで解きます。

213 これは (i) のタイプです。

214 これは (ii) のタイプです。

215 底 a の $a > 1$，$0 < a < 1$ による場合分けが必要となります。

解答・解説

対数不等式

213 (1) **真数 >0** より

「$x-3>0$ かつ $4x>0$」すなわち　$x>3$　……①

このとき与式は

$$\log_2 (x-3)^2 < \log_2 4x$$

底が 1 より大きいので

$$(x-3)^2 < 4x$$
$$x^2-10x+9<0$$
$$(x-9)(x-1)<0$$
$$\therefore\quad 1<x<9$$

①より　$\underline{\boldsymbol{3<x<9}}$

(2) **真数 >0** より

「$x+2>0$ かつ $x+3>0$」すなわち　$x>-2$　……①

このとき与式は

$$\log_2(x+2) \leqq \log_2 2 + \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4}$$
$$2\log_2(x+2) \leqq 2\log_2 2 + \log_2(x+3)$$
$$\log_2(x+2)^2 \leqq \log_2 2^2(x+3)$$

底が 1 より大きいので

$$(x+2)^2 \leqq 4(x+3) \qquad \therefore\quad -2\sqrt{2} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$$

①より　$\underline{\boldsymbol{-2<x\leqq 2\sqrt{2}}}$

214 (1) **真数 >0** より

「$x-2>0$ かつ $2x-1>0$」すなわち　$x>2$　……①

このとき与式は

$$\log_{\frac{1}{2}} (x-2)^2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$$

底が 1 より小さいので

$$(x-2)^2 < 2x-1$$
$$x^2-6x+5<0$$
$$(x-5)(x-1)<0$$
$$\therefore\quad 1<x<5$$

①より　$\underline{\boldsymbol{2<x<5}}$

(2) **真数 >0** より

「$2+x>0$ かつ $3-x>0$」すなわち　$-2<x<3$　……①

このとき与式は

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(2+x)}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2+x)+2\log_{\frac{1}{2}}2\leqq 2\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}4(2+x)\leqq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2$$

底が 1 より小さいので

$$4(2+x)\geqq(3-x)^2$$

$$8+4x\geqq 9-6x+x^2$$

$$x^2-10x+1\leqq 0$$

$$\therefore\quad 5-2\sqrt{6}\leqq x\leqq 5+2\sqrt{6}$$

①より　$\boldsymbol{5-2\sqrt{6}\leqq x<3}$

215 **真数 >0** より

「$x-3>0$ かつ $x-1>0$」すなわち　$x>3$　……①

このとき与式は

$$\log_a(x-3)^2>\log_a(x-1)$$

(i) **$a>1$ のとき**

$$(x-3)^2>x-1$$

$$x^2-7x+10>0$$

$$(x-5)(x-2)>0$$

①より

$$x>5$$

(ii) **$0<a<1$ のとき**

$$(x-3)^2<x-1$$

$$x^2-7x+10<0$$

$$(x-5)(x-2)<0$$

①より

$$3<x<5$$

よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{a>1}\text{ のとき} & \boldsymbol{x>5}\\ \boldsymbol{0<a<1}\text{ のとき} & \boldsymbol{3<x<5}\end{cases}$$