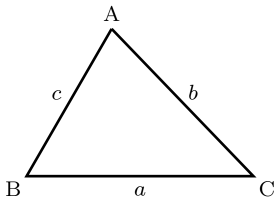
三角形の成立条件
および
直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形であるための条件

1　三角形の成立条件

△ABC において，辺 BC，CA，AB をそれぞれ ∠A，∠B，∠C の**対辺**といい，∠A，∠B，∠C をそれぞれ辺 BC，CA，AB の**対角**という．

以下では，△ABC の ∠A，∠B，∠C の対辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c で表す．



1.1　三角形の辺と角の関係

三角形の任意の 2 辺について，2 辺の大小関係はその対角の大小関係と一致する．したがって，最大の辺の対角は最大の角である．

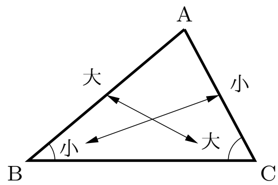
定理

△ABC の 2 辺とその対角について，次のことが成り立つ．

(i) $b = c \iff \angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

(ii) $b < c \iff \angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}$

(iii) $b > c \iff \angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$



(証明) (i) $\Longrightarrow$ の証：$b = c$ ならば，辺 BC の中点を M とすると，△ABM ≡ △ACM であり

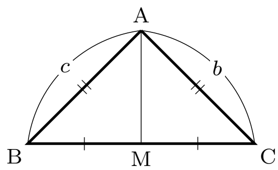
$$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$$

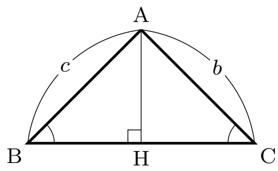
が成り立つ．

$\Longleftarrow$ の証：$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ ならば，A から辺 BC に垂線 AH をひくと，△ABH ≡ △ACH であり

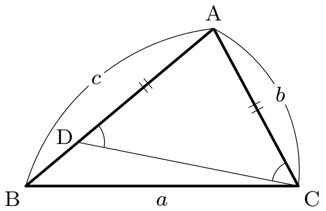
$$b = c$$

が成り立つ．





(ii) $\Longrightarrow$ の証：$b < c$ ならば，辺 AB 上に点 D を AD $= b$ となるようにとることができる．このとき，△ADC は AD $=$ AC の二等辺三角形であり



$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{ACD} \quad (\because \ (\mathrm{i})) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．ここで

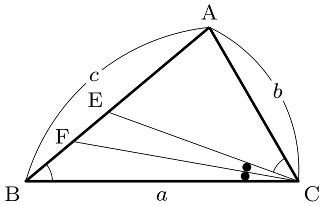
$$\angle\mathrm{ADC} = \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{BCD} > \angle\mathrm{B}$$
$$\angle\mathrm{ACD} = \angle\mathrm{C} - \angle\mathrm{BCD} < \angle\mathrm{C}$$

であるから，① とあわせると

$$\angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}$$

が成り立つ．

$\Longleftarrow$ の証：$\angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}$ ならば，辺 AB 上に点 E を $\angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{B}$ となるようにとることができる．$\angle$ECB の二等分線と辺 AB との交点を F とすると



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AFC} &= \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{BCF} \\ &= \angle\mathrm{ACE} + \angle\mathrm{ECF} \\ &= \angle\mathrm{ACF}\end{aligned}$$

△AFC は AC $=$ AF の二等辺三角形であり

$$b = \mathrm{AF} < \mathrm{AB} = c$$

である．すなわち

$$b < c$$

が成り立つ．

(iii) については，(ii) の b, c を c, b に，B, C を C, B に置き換えることにより，証明される．

- (ii) の ($\Longleftarrow$ の証) は背理法を用いてもよい．
  すなわち，$\angle\mathrm{B} < \angle\mathrm{C}$ のもとで $b \geqq c$ と仮定する．
  $b = c$ のときは，(i) より，$\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ であり，不合理．
  $b > c$ のときは，(ii) の $\Longrightarrow$ が示されると (iii) の $\Longrightarrow$ も示されるから，$\angle\mathrm{B} > \angle\mathrm{C}$ であり，不合理．
  よって，$b < c$ である．

1.2 三角形の成立条件

辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，

2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい（寄り道すると，遠くなる）

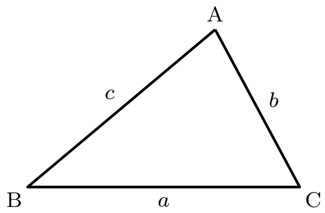
ことが示される．さらに，これは三角形の存在条件へと進めることができる．まずは次の定理を示しておこう．

補助定理 A

$\triangle$ABC において

$$(*)\begin{cases} b+c>a \\ c+a>b \\ a+b>c \end{cases}$$

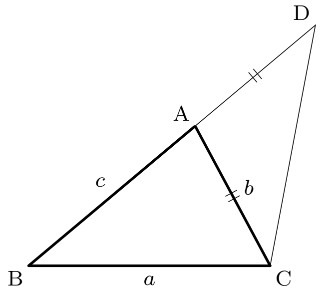
が成り立つ．



(証明) $b+c>a$ を証明する．

辺 BA の延長上に，AD = AC となるように点 D をとる．このとき

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BA}+\mathrm{AD}=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=c+b$$



である．$\triangle$ACD は二等辺三角形であるから

$$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{D}$$

よって

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{BCA}+\angle\mathrm{D}>\angle\mathrm{D}$$

$\triangle$BCD において，$\angle\mathrm{BCD}>\angle\mathrm{D}$ であるから，辺と角の大小関係により

$$\mathrm{BD}>\mathrm{BC}$$

である．すなわち

$$b+c>a$$

が成り立つ．

同じく，$c+a>b$, $a+b>c$ も成り立つ．　……(証明終わり)

補助定理 B

$$(*)\begin{cases} b+c>a \\ c+a>b \\ a+b>c \end{cases} \iff |b-c|<a<b+c \qquad \cdots\cdots (*)'$$

(証明) $(*)$ の第 2，第 3 の不等式を a について整理すると

$$\begin{cases} c+a>b \\ a+b>c \end{cases} \iff \begin{cases} a>b-c \\ a>c-b \end{cases} \iff |b-c|<a$$

したがって

$$(*) \iff |b-c|<a<b+c$$

が成り立つ．　……(証明終わり)

- 補助定理 B では，a, b, c は正の数とは限定していない．しかし，$|b-c| \geqq 0$ であるから，$|b-c| < a$ とあわせると $a > 0$ がわかる．同じく，$(*)$ を b, c について不等式を整理することにより，$b > 0$，$c > 0$ であることもわかる．
- a, b, c が正の数と確認されたから，$(*)'$ を三角形の辺の長さとして表現すると

  「2 辺の長さ和は，他の 1 辺の長さより大きく，
  2 辺の長さ差は，他の 1 辺の長さより小さい．」

  となる．

それでは，三角形の成立条件へと進もう．

定理

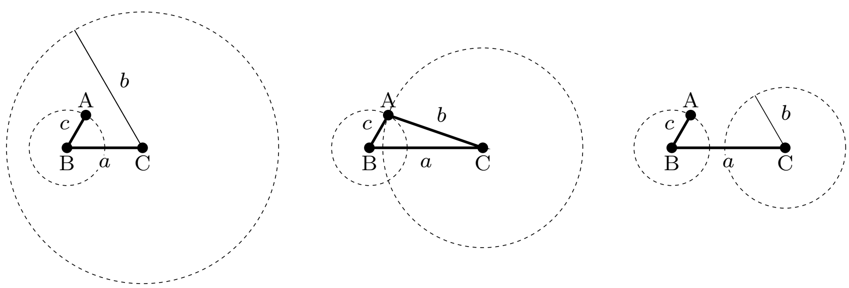
正の数 a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$$(*)\begin{cases} b+c>a \\ c+a>b \\ a+b>c \end{cases}$$

である．

(証明) $\Longrightarrow$ の証：3 つの正の数 a, b, c を 3 辺の長さとする三角形が存在するならば，補助定理 A により $(*)$ は成り立つ．
$\Longleftarrow$ の証：補助定理 B より a, b, c は正であり，不等式 $|b-c| < a < b+c$ が成り立つ．$\mathrm{BC} = a$ となる線分 BC をとり，B を中心とする半径 c の円 B と，C を中心とする半径 b の円 C を考える．

$|b-c| < a < b+c$ のとき，2 円 B, C は 2 点で交わる ($|b-c| = a$ のとき，2 円 B, C は内接し，$|b+c| = a$ のとき，2 円 B, C は外接する) から，この交点の 1 つを A とすると，3 つの正の数 a, b, c を 3 辺の長さとする三角形 ABC をつくることができる．



$a < b-c$ のとき　　$b-c < a < b+c$ のとき　　$b+c < a$ のとき

2　直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形であるための条件

2.1　余弦定理

△ABC の 1 つの角と 3 つの長さの間に次の等式が成り立つ．この等式は余弦定理と呼ばれる．余弦定理は

「2 辺の長さと夾角 (隣り合う 2 辺のつくる角) がわかれば，
残りの辺の長さを求めることができる」

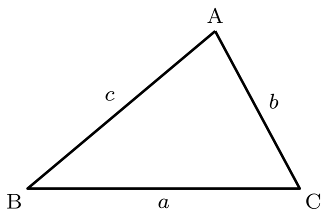
という定理である．

定理

△ABC において

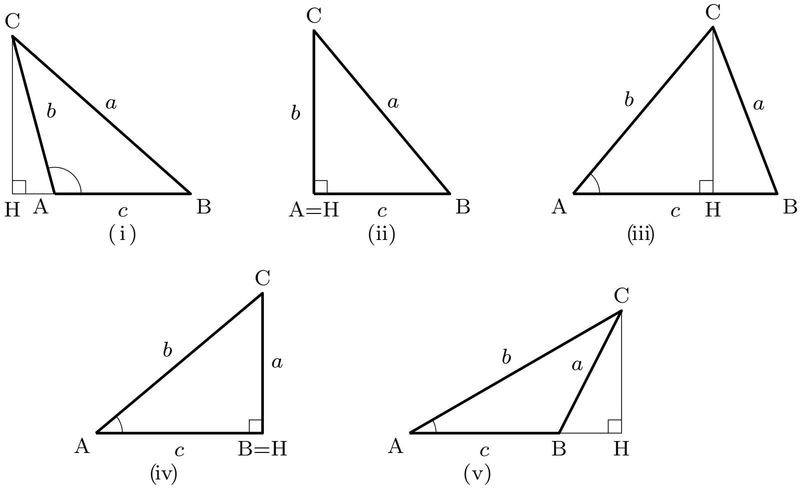
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

が成り立つ．



(証明) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を示す．

b, c, ∠A の値が与えられたものとする．C から辺 AB またはこの延長上に下した垂線の足を H とする．H の位置は次の 5 つの場合がある．



(i)，(ii)，(iii)，(v) のとき，△HBC は直角三角形であり，どのときも

$$a^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

である．(iii) のとき

$$\mathrm{CH} = b\sin A,$$
$$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$$

であり

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

が成り立つ．

(i) のとき，$\mathrm{CH} = b\sin A$，$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} + \mathrm{AH} = c + b\cos(180° - A) = c - \cos A$.

(ii) のとき，$\mathrm{CH} = b$，$\mathrm{BH} = c$ である．$\sin 90° = 1$，$\cos 90° = 0$ より，$\mathrm{CH} = b\sin A$，$\mathrm{BH} = c - b\cos A$ としてよい．

(v) のとき，$\mathrm{CH} = b\sin \mathrm{A}$，$\mathrm{BH} = \mathrm{AH} - \mathrm{AB} = b\cos A - c$.

いずれのときも，(iii) と同じ結果を得る．

(iv) のとき，$a^2 = b^2 - c^2$ である．これは

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{c}{b} = b^2 - c^2$$

であり，(iv) のときも (iii) に含めることができる．

以上，すべての場合について

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

が成り立つ．

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ のときも同じく成り立つ．

余弦定理より次の等式を導くことができる．

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2.2 直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形であるための条件

三角形において最大の角以外の角はどちらも鋭角である．よって，三角形が鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを調べるには，最大の角が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかを調べればよい．

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}$ を最大の角とすると，$\mathrm{BC} = a$ が最大の辺である．余弦定理より $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ であり，$\cos A$ の符号と $b^2 + c^2 - a^2$ の符号は一致するから，次が成り立つ．

$\triangle\mathrm{ABC}$ において，BC が最大の辺のとき

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{A} = 90° &\iff a^2 = b^2 + c^2 \\ \angle\mathrm{A} < 90° &\iff a^2 < b^2 + c^2 \\ \angle\mathrm{A} > 90° &\iff a^2 > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

ここで，$a,\ b,\ c$ は三角形の 3 辺の長さであり，さらに，最大辺の長さが a としているので，三角形の成立条件は

$$a < b + c$$

となる．直角三角形，鋭角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを調べるときに

三角形の成立条件を前提としなければならないのか？

実は，直角三角形，鋭角三角形については，この前提は不要である．$a^2 \leqq b^2 + c^2$ から $a < b + c$ を導くことができるからである．

定理

正の数 $a,\ b,\ c$ において，a が最大のとき

(i) $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする直角三角形が存在するための条件は

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(ii) $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする鋭角三角形が存在するための条件は

$$a^2 < b^2 + c^2$$

(iii) $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする鈍角三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} a < b + c \\ a^2 > b^2 + c^2 \end{cases}$$

である．

(証明) (i)，(ii) について調べる．

$\Longrightarrow$ の証明：$a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする三角形が存在するときの議論であり，長さ a である最大辺の対角 $\angle\mathrm{A}$ は

$$\text{(i) } \angle\mathrm{A} = 90^\circ, \quad \text{(ii) } \angle\mathrm{A} < 90^\circ$$

である．このとき，$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$ により

$$\text{(i) } a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{(ii) } a^2 < b^2 + c^2$$

であることが示される．

$\Longleftarrow$ の証明：(i)，(ii) については，a が最大であるから

(i)′ $a^2 = b^2 + c^2$ ならば $a < b + c$
(ii)′ $a^2 < b^2 + c^2$ ならば $a < b + c$

であることを示せば，$\mathrm{BC} = a,\ \mathrm{CA} = b,\ \mathrm{AB} = c$ となる三角形 ABC が存在する．このとき

$a^2 = b^2 + c^2$ ならば，$\cos A = 0$ であり，最大角 $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$
$a^2 < b^2 + c^2$ ならば，$\cos A > 0$ であり，最大角 $0^\circ < \angle\mathrm{A} < 90^\circ$

すなわち

$$\text{(i) 直角三角形}\quad\text{(ii) 鋭角三角形}$$

であることが確認される．

(i)$'$，(ii)$'$ まとめて，$a^2 \leqq b^2+c^2$ ならば $a<b+c$ であることを示す．

$$(b+c)^2-a^2=(b^2+c^2-a^2)+2bc \leqq 2bc>0 \quad (b,\ c \text{ は正数})$$

一方

$$(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a)$$

であるから

$$(b+c+a)(b+c-a)>0$$

が成り立つ．$b+c+a>0$ より $b+c-a>0$ であるから

$$a<b+c$$

が成り立つ．

(iii) について調べる．

a が最大であるから，$a<b+c$ は $a,\ b,\ c$ を 3 辺の長さとする三角形の存在条件であり，これと $a^2>b^2+c^2$ をあわせると，この三角形は $\angle\mathrm{A}$ が鈍角となる三角形である．

よって，(i)，(ii)，(iii) は成り立つ．　　　　……(証明終わり)

- a が最大ということより，$a<b+c$ のみで三角形の成立条件とした．a の最大性と $b,\ c$ が正であることから，$b<c+a,\ c<a+b$ が成り立つことを確認しておこう．

$$b \leqq a < c+a \qquad \therefore\quad b<c+a$$
$$c \leqq a < b+a \qquad \therefore\quad c<a+b$$

- (iii) において，三角形の成立条件 $a<b+c$ を外すことはできない．
  例えば，3 つの正の数の組 $(a,\ b,\ c)=(8,\ 3,\ 4)$ は $a^2>b^2+c^2$ を満たすが，$a,\ b,\ c$ は三角形の 3 辺の長さとはならない．

<table>
<tr><td colspan="4">$0<b<a$ かつ $0<c<a$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a^2<b^2+c^2$</td><td rowspan="2">$a^2=b^2+c^2$</td><td colspan="2">$a^2>b^2+c^2$</td></tr>
<tr><td>$a<b+c$</td><td>$a \geqq b+c$</td></tr>
<tr><td>鋭角三角形</td><td>直角三角形</td><td>鈍角三角形</td><td>三角形でない</td></tr>
</table>