同値変形

kamelink.com

目 次

同値変形は教科書で扱われていませんが，式を変形する際には避けて通れないテーマです．よく使う同値変形を確認しておきましょう．

1 「かつ」と「または」

(i) x, y が実数のとき

$$x = 0 \text{ かつ } y = 0 \iff x^2 + y^2 = 0$$

(ii) $x = 0$ または $y = 0 \iff xy = 0$

(i) $\Longrightarrow$ について

$$x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \quad \text{であり，成立する．}$$

$\Longleftarrow$ について

x, y は実数であるから $x^2 \geqq 0$, $y^2 \geqq 0$ がともに成り立つ．

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y = 0$$

であり，成立する．

(ii) 積についてのこの性質は方程式を解くときの基本原理である．(この性質を満たす数の集合を**整域**という．0 でないもの同士を掛けて 0 となるものは**零因子**とよばれる．例えば，6 を法とする合同式では $2 \times 3 \equiv 0 \pmod 6$ となり，剰余の集合 $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ は整域でない．)

「または」は**「少なくとも一方」**という意味であり，「どちらか一方」ということではない．したがって，「$x = 0$ または $y = 0$」は $x = y = 0$ も含んでいることに注意せよ．

実数 α, β, γ が $\alpha+\beta+\gamma=3$ を満たしているとし，

$$p=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta, \quad q=\alpha\beta\gamma$$

とおく．

(1) $p=q+2$ のとき，α, β, γ の少なくとも 1 つは 1 であることを示せ．
(2) $p=3$ のとき，α, β, γ はすべて 1 であることを示せ．

(96 大阪市大 理・医・工 1)

解答例はここをクリック (以下同様)．

(i) $\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha,\ \beta \text{ はともに実数}\\ \alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}\alpha<0\\ \beta<0\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha,\ \beta \text{ はともに実数}\\ \alpha+\beta<0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$

(iii) $\begin{cases}\alpha>0\\ \beta<0\end{cases}$ または $\begin{cases}\alpha<0\\ y>0\end{cases} \iff \alpha\beta>0$

これらは 2 次方程式の解の配置でよく使われる．

α, β が虚数であっても，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ は実数となることはある．(i)，(ii) では α, β が実数という条件を忘れてはならない．(iii) においては，この条件は不要である．$\alpha\beta<0$ から α, β が実数であることが導かれるからである．

$\begin{cases}\alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$ は「$\alpha>0$ かつ $\beta>0$」の意味で用いている．「かつ」でつながる条件が多くなるとこのように書き方をすることが多い．

a を実数の定数とする．2 次方程式 $x^2-2ax+3a-2=0$ …… $(*)$ を考える．
方程式 $(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である．
方程式 $(*)$ が正の解と負の解をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ である．
方程式 $(*)$ が異なる 2 つの正の解をもつような定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(19 関西学院大 理工)

解答例

2　絶対値

> x が実数のとき
>
> (i) $|x| = x \iff x \geqq 0$
> (ii) $|x| = -x \iff x \leqq 0$
> (iii) $|x| > x \iff x < 0$

x が実数のとき

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり，これは

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

としてもよい．

> x は実数，a は実数の定数のとき
>
> (i) $|x| = a \iff x = \pm a$ かつ $a \geqq 0$
> (ii) $|x| < a \iff -a < x < a$
> (iii) $|x| > a \iff x < -a$ または $a < x$

実数 x の絶対値 $|x|$ は，数直線上の原点 $\mathrm{O}(0)$ と点 $\mathrm{P}(x)$ との距離である．

- z が複素数 $z = p + qi$ (p，q は実数) のとき，z の絶対値は $|z| = \sqrt{p^2 + q^2}$ であり，このときも複素数平面上の原点 $\mathrm{O}(0)$ と点 $\mathrm{P}(z)$ との距離である．

(i) は，$|x|$ を原点からの距離と考えるとよい．

(ii) でも，$|x|$ を原点からの距離を考えるとよい．ここで，$a \geqq 0$ を付加する必要はない．なぜなら

$$-a < x < a \text{ より，} -a < a \text{ すなわち } \quad a > 0$$

として $a > 0$ が保証されるからである．

(iii) では，$|x| > a$ を満たす x を

$$\begin{cases} x \text{ は任意} & (a < 0 \text{ のとき}) \\ x < -a \text{ または } a < x & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

としてもよいが，$a < 0$ のときの「$x < -a$ または $a < x$」を満たす x は実数全体となるので，a の符号による場合分けせずに

$$x < -a \text{ または } a < x$$

としてよい．

方程式 $|x-2|=5x$ を解け．

(20 高知工科大 経済・マネ 1(1))

解答例

不等式 $|2x-3|-3|x-5|>0$ を満たす実数 x の範囲を求めなさい．

(23 公立千歳科技大 理工 1(2))

解答例

3　連立方程式

代入法の原理

$$\begin{cases} y=f(x) \\ g(x,\ y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=f(x) \\ g(x,\ f(x))=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$，$\Longleftarrow$ どちらも問題ないだろう．代入法を実行したときは，代入して得られた式と代入に利用した式を組めということである．

加減法の原理

$ad-bc \fallingdotseq 0$ のとき

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0 \\ g(x,\ y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} af(x,\ y)+bg(x,\ y)=0 \\ cf(x,\ y)+dg(x,\ y)=0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ は任意の $a,\ b,\ c,\ d$ に対して成り立つ．

$\Longleftarrow$ については，$g(x,\ y)$ あるいは $g(x,\ y)$ の消去を目指して式を変形する．

$$\begin{cases} af(x,\ y)+bg(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ① \\ cf(x,\ y)+dg(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

とおくと

$d\times ①-b\times ②$ より　$(ad-bc)f(x,\ y)=0$

$c\times ①-a\times ②$ より　$(bc-ad)g(x,\ y)=0$

となるから，$ad-bc \fallingdotseq 0$ であるときは

$$f(x,\ y)=g(x,\ y)=0$$

を得る．

次は拙著「数学 軌跡・領域 分野別標準問題精講」での自作問題です.

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} ax+y=1 & \cdots\cdots ① \\ x+ay=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を次のように加減法を用いて解いた. 誤りを指摘し, 正しい答を求めよ.

誤答例

①$\times a-$② より　$(a^2-1)x=a-1$　$\cdots\cdots$ ③

①$-$②$\times a$ より　$(1-a^2)y=1-a$　$\cdots\cdots$ ④

これより

$$\begin{cases} a \neq \pm 1 \text{ のとき} & x=\dfrac{1}{a+1},\ y=\dfrac{1}{a+1} \\ a=1 \text{ のとき} & x,\ y \text{ は任意} \\ a=-1 \text{ のとき} & \text{解なし} \end{cases}$$

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=x+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を次のように代入法を用いて解いた. 誤りを指摘し, 正しい答を求めよ.

誤答例

②を①に代入すると

$$x^2+(x+1)^2=1$$
$$2x^2+2x=0$$
$$\therefore\quad x=0,\ -1 \quad \cdots\cdots ③$$

③を①に代入して

$$x=0 \text{ のとき}\quad 0+y^2=1 \quad \therefore\quad y=\pm 1$$
$$x=-1 \text{ のとき}\quad 1+y^2=1 \quad \therefore\quad y=0$$

以上より　$(x,\ y)=(0,\ \pm 1),\ (-1,\ 0)$

解答例

4　分数方程式・不等式

分数方程式・分数不等式の解法として

- グラフを利用する
- 同値変形を利用する

という解法があります.

分数方程式

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

分数式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が定義されるためには $g(x) \neq 0$ が必要で，$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ となるのは $f(x) = 0$ となるときです．$\Longrightarrow$，$\Longleftarrow$ どちらも問題ないでしょう．

方程式

$$\frac{ax}{ax+a+1} = (a+1)x+1$$

の解を求めよ．ただし a は -1 でない定数とする．

(09 奈良女子大 後 理 (数)1)

解答例

分数不等式

整式 $f(x)$，$g(x)$ について

(i) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x)g(x) > 0$

(ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq 0 \iff \begin{cases} f(x)g(x) \geqq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

(i) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ ということは，分母と分子が同符号ということです．これは $f(x)g(x) > 0$ と表すことができます．辺々に $\{g(x)\}^2 (> 0)$ を掛けて $f(x)g(x) > 0$ を得ると考えてもよいでしょう．また，分数式ですから (分母) $\neq 0$ が前提となりますが，$f(x)g(x) > 0$ に条件 (分母) $\neq 0$ は含まれています．

(ii) (i) と違い，条件 (分母) $\neq 0$ を忘れてはいけない．

次の問いに答えよ．

(1) 分数関数 $y = \dfrac{8x-4}{x+1}$ のグラフをかけ．

(2) 不等式 $\dfrac{8x-4}{x+1} < 2x$ を解け．

(09 中部大 工 4)

解答例

不等式 $\dfrac{x-3}{2x-1} \leqq \dfrac{2x-3}{x-3}$ を解け．

この問題については，答えだけではなく，答えを導く過程も書くこと．

(17 学習院大 法 2)

解答例

5　無理方程式・不等式

無理方程式・無理不等式の解法として

- グラフを利用する
- 辺々を平方し，必要条件として解の候補を求め，十分性を確かめる

という解法があるが，

- 同値変形を利用する

という解法もある．

無理方程式

整式 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

$\Longrightarrow$，$\Longleftarrow$ をそれぞれ示せばよいが，同値な条件を導くという立場で確認しておく (同値性を保った式変形を習慣付けたい)．

左の条件は等式なので，平方しても等号は成り立つ．

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longrightarrow f(x) = \{g(x)\}^2$$

右から左にもどることを考える．

$f(x) = \{g(x)\}^2$ が成り立つとき，$\{g(x)\}^2 \geqq 0$ なので，$f(x) \geqq 0$ でもあり，辺々の平方根をとることができ

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{\{g(x)\}^2} \qquad \therefore \quad \sqrt{f(x)} = |g(x)|$$

が成り立つ．$|g(x)| = g(x)$ である条件は $g(x) \geqq 0$ $(\because\ \ \mathbf{2})$ であるから，この条件 $\boldsymbol{g(x) \geqq 0}$ **を付加** することにより

$$\begin{cases} f(x) = \{g(x)\}^2 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{f(x)} = g(x)$$

が得られる．

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ ならば，当然 $g(x) \geqq 0$ は成り立つので

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = \{g(x)\}^2 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．すなわち，$(*)$ は成り立つ．

次の方程式を解きなさい．

$$\sqrt{5-2x} - x + 2 = 0$$

(16 福島大 理工 1(1))

解答例

無理不等式

整式 $f(x)$, $g(x)$ について

(i) $\sqrt{f(x)} \leqq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leqq \{g(x)\}^2 \\ f(x) \geqq 0 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$

(ii) $f(x) \leqq \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(x) \geqq 0 \\ \{f(x)\}^2 \leqq g(x) \end{cases}$

(iii) $\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < \{g(x)\}^2 \\ f(x) \geqq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

(iv) $f(x) < \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(x) \geqq 0 \\ \{f(x)\}^2 < g(x) \end{cases}$

$\sqrt{A} \leqq B$ のタイプは，左辺が 0 以上なので右辺も 0 以上であり，平方しても大小は変わらないが，$A \leqq \sqrt{B}$ のタイプは，$A < 0$ の場合もあるので注意が必要である．

これらの条件は覚えるのではなく，以下のようにして導きながら使えるようにしておけばよい．

(i) 左の条件が成り立つとき，$\sqrt{f(x)} \geqq 0$ なので $g(x) \geqq 0$ でもあり，平方しても大小は変わらない．

$$\sqrt{f(x)} \leqq g(x) \Longrightarrow f(x) \leqq \{g(x)\}^2$$

右から左にもどることを考える．

$f(x) \leqq \{g(x)\}^2$ が成り立つとき，$\{g(x)\}^2 \geqq 0$ であるが，$f(x)$ は負かもしれない．$\sqrt{f(x)}$ が存在するためには，条件 $\boldsymbol{f(x) \geqq 0}$ **を付加** しなければならない．$f(x) \geqq 0$ を付加すると

$$\begin{cases} f(x) \leqq \{g(x)\}^2 \\ f(x) \geqq 0 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{f(x)} \leqq \sqrt{\{g(x)\}^2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{f(x)} \leqq |g(x)|$$

が成り立つ．さらに，$|g(x)| = g(x)$ である条件は $g(x) \geqq 0$ ($\because$ **2**) であるから，この条件 $\boldsymbol{g(x) \geqq 0}$ **を付加** することにより

$$\begin{cases} f(x) \leqq \{g(x)\}^2 \\ f(x) \geqq 0 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{f(x)} \leqq g(x)$$

が得られる．

$\sqrt{f(x)} \leqq g(x)$ が成り立つならば，$f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ でもあり

$$\sqrt{f(x)} \leqq g(x) \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leqq \{g(x)\}^2 \\ f(x) \geqq 0 \\ g(x) \geqq 0 \end{cases}$$

は成り立つ．すなわち，(i) は成り立つ．

(ii) $f(x)$ が負のときは辺々平方したときの $\{f(x)\}^2$ と $g(x)$ の大小が定まらない．$f(x)$ の符号で場合分けして平方根をはずすことにする．

(ア) $f(x) < 0$ のとき

左の条件が成り立つならば，$\sqrt{g(x)}$ が存在しており $g(x) \geqq 0$ である．

$$f(x) \leqq \sqrt{g(x)} \Longrightarrow g(x) \geqq 0$$

が成り立つ．

右から左にもどることを考える．

$g(x) \geqq 0$ ならば $\sqrt{g(x)} \geqq 0$ であるから

$$g(x) \geqq 0 \Longrightarrow f(x) < \sqrt{g(x)} \quad (\because\ f(x) < 0)$$

すなわち，$g(x) \geqq 0 \Longrightarrow f(x) \leqq \sqrt{g(x)}$ はつねに成り立つ．

(イ) $f(x) \geqq 0$ のとき

左の条件において $\sqrt{g(x)} \geqq 0$ であり，辺々平方しても大小は変わらない．

$$f(x) \leqq \sqrt{g(x)} \Longrightarrow \{f(x)\}^2 \leqq g(x)$$

が成り立つ．

右から左にもどることを考える．

$\{f(x)\}^2 \leqq g(x)$ のとき，$\{f(x)\}^2 \geqq 0$ なので $g(x) \geqq 0$ でもあり

$$\{f(x)\}^2 \leqq g(x) \Longrightarrow \sqrt{\{f(x)\}^2} \leqq \sqrt{g(x)}$$

$\sqrt{\{f(x)\}^2} = |f(x)| = f(x) \quad (\because\ f(x) \geqq 0)$ であるから

$$\{f(x)\}^2 \leqq g(x) \Longrightarrow f(x) \leqq \sqrt{g(x)}$$

が成り立つ．

(ア)，(イ) をまとめると，(ii) を得る．(ア)(イ) の場合分けで $f(x) < 0,\ f(x) \geqq 0$ としてが，$f(x) \leqq 0,\ f(x) \geqq 0$ でもよい．

(iii) (i) と同じく考えればよい．右の条件の $g(x) > 0$ は第 1 の不等式があるので $g(x) \geqq 0$ でもよい．

(iv) (ii) と同じく考えればよい．

不等式 $\sqrt{x^2 + 2x - 3} < 2x + 6$ を解け．

(19 東京都市大 工・知識工 1(1))

解答例

不等式 $\sqrt{x+1} \geqq 2x - 1$ を満たす x の値の範囲は，

$$-\boxed{\text{カ}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

(17 東洋大 理工・生命・食環境 1-2)

解答例