複素数平面における直線の方程式

kamelink.com

目 次

1 点 **A** を通り $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ と平行な直線の方程式 **3**

2 **2** 点 $\mathbf{A}(\alpha)$，$\mathbf{B}(\beta)$ を通る直線の方程式 **4**

3 点 $\mathbf{A}(\alpha)$ を通り $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ と垂直な直線の方程式 **4**

4 垂直二等分線 **5**

5 直線の一般式 **6**

6 円の接線 **7**

複素数平面における直線の方程式を整理しておこう．

(確認事項)

まず，今回のテーマで使う用語，道具を確認しておく．

複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数，i は虚数単位) に対し，$x - yi$ を z の**共役複素数**といい，$\overline{z}$ で表す．すなわち

$$\overline{z} = x - yi$$

である．共役について次のことが成り立つ．

1° $\overline{\overline{z}} = z$

2° $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}$ (複号同順)

3° $\overline{(\alpha\beta)} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

4° $\beta \neq 0$ のとき，$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

また，$\begin{cases} z = x + yi \\ \overline{z} = x - yi \end{cases}$ を x, y について解くと

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

であり，z の実部 x，虚部 y を z, $\overline{z}$ で表すことができ

1° z が実数である $\iff$ $z - \overline{z} = 0$

2° z が純虚数である $\iff$ $z + \overline{z} = 0$ かつ $z \neq 0$

が成り立つ．

複素数 $z = x + yi$ (x, y は実数, i は虚数単位) に対し

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

を z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す．$|z|$ は原点 O と点 z の距離であり

$$|z|^2 = z\overline{z}$$

が成り立つ．2 点 α, β の距離は $|\beta - \alpha|$ である．

0 でない 2 つの複素数 α, β が**極形式**

$$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad \beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

で表されるとき

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\}$$

である．これは

$$\begin{cases} |\alpha| : |\beta| = r_1 : r_2 \\ \angle\alpha 0\beta = \theta_2 - \theta_1 \end{cases}$$

であり，$\triangle 0\alpha\beta$ の **2 辺の比と夾角**を示している．

異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) について

$$\boldsymbol{\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ (r > 0, \ -\pi < \theta \leqq \pi)$$

が成り立つとき

$$\begin{cases} \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : r \\ \angle\beta\alpha\gamma = \theta \end{cases}$$

である．ここで，$\angle\beta\alpha\gamma$ は半直線 AB から半直線 AC までの向き付きの回転角である．したがって

1° A, B, C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数である　　(**共線条件**)

2° $\mathrm{AB} \perp \mathrm{AC}$ $\iff$ $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数である　　(**垂直条件**)

が成り立つ．

異なる 4 点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) について

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ (r > 0, \ -\pi < \theta \leqq \pi)$$

が成り立つとき

$$\begin{cases} \mathrm{AB} : \mathrm{CD} = 1 : r \\ (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ と } \overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ の向き付きのなす角}) = \theta \end{cases}$$

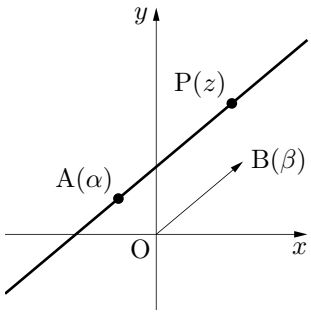
である．したがって

1° $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$ $\iff$ $\dfrac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$ が実数である　　(**平行条件**)

2° $\mathrm{AB} \perp \mathrm{CD}$ $\iff$ $\dfrac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$ が純虚数である　　(**垂直条件**)

が成り立つ．

1　点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と平行な直線の方程式



2 点 A，B ($\neq$ O) を表す複素数をそれぞれ α, β ($\neq 0$) とおく．点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ($\neq \vec{0}$) と平行な直線上の点 P(z) は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表すことができる．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned} & z = \alpha + t\beta \\ \iff & \frac{z-\alpha}{\beta} \text{は実数である} \\ \iff & \boldsymbol{\frac{z-\alpha}{\beta} = \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)}} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

分母を払って式を整理すると

$$\begin{aligned} & \overline{\beta}(z-\alpha) - \beta(\overline{z}-\overline{\alpha}) = 0 \\ \therefore\ & \boldsymbol{\overline{\beta}z - \beta\overline{z} - (\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta) = 0} \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

を得る．

①，すなわち「$\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ が実数」を満たす点 z の全体が点 α を通り $\overrightarrow{0\beta}$ と平行な直線である．式 $\dfrac{z-\alpha}{\beta}$ の分子・分母から通過点と方向ベクトル (傾き) を読み取ることができる．

② において，$\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta$ は「純虚数または 0」である．$-(\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta)$ も「純虚数または 0」であるから，② は

$$\overline{\beta}z - \beta\overline{z} + \gamma = 0 \ (\gamma \text{ は純虚数または } 0) \qquad \cdots\cdots ③$$

としてよく．これは直線の一般式である．

③ の辺々に $-i$ をかけると

$$\begin{aligned} & -i\overline{\beta}z + i\beta\overline{z} - i\gamma = 0 \\ \therefore\ & \overline{(i\beta)}z + i\beta\overline{z} - i\gamma = 0 \end{aligned}$$

$-i\gamma$ は実数であるから，③ は

$$\overline{\beta'}z + \beta'\overline{z} + \gamma' = 0 \ (\gamma' \text{は実数}) \qquad \cdots\cdots ③'$$

と表すこともできる．すなわち，直線の一般式は

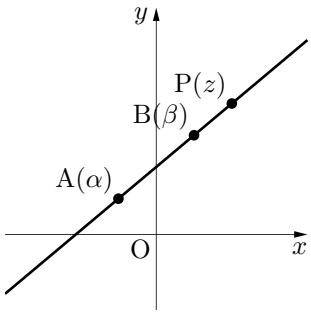
$$\boldsymbol{\overline{\lambda}z \pm \lambda\overline{z} + \mu = 0}$$

の形をしており，$\lambda\overline{z}$ につく符号が

$$\begin{cases} - \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu} \text{ は純虚数または } \mathbf{0} \\ + \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu} \text{ は実数} \end{cases}$$

である．

2　2 点 $\mathbf{A}(\alpha)$，$\mathbf{B}(\beta)$ を通る直線の方程式



異なる 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ α, β $(\alpha \neq \beta)$ とおく．2 点 A，B を通る直線上の点 P(z) は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことができる．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned} & z = \alpha + t(\beta - \alpha) \\ \iff & \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ は実数である} \\ \iff & \boldsymbol{\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} = \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

分母を払って式を整理すると

$$\begin{aligned} & (\overline{\beta} - \overline{\alpha})(z - \alpha) - (\beta - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = 0 \\ \therefore\ & \boldsymbol{(\overline{\beta} - \overline{\alpha})z - (\beta - \alpha)\overline{z} - (\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta) = 0} \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

を得る．

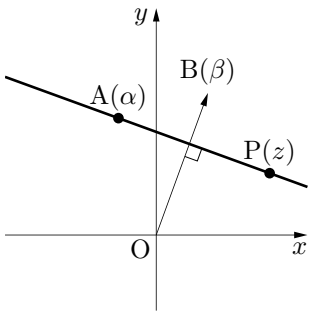
1 と同じく，② を変形すると直線の一般式

$$\boldsymbol{\overline{\lambda}z \pm \lambda\overline{z} + \mu = 0}$$

$$\begin{cases} - \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu} \text{ は純虚数または } \mathbf{0} \\ + \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu} \text{ は実数} \end{cases}$$

が得られる．

3　点 $\mathbf{A}(\alpha)$ を通り $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ と垂直な直線の方程式



2 点 A，B $(\neq \mathrm{O})$ を表す複素数をそれぞれ α, β $(\neq 0)$ とおく．点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(\neq \vec{0})$ と垂直な直線上の点 P(z) は

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

を満たす．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned} & \arg\frac{z-\alpha}{\beta} = \pm\frac{\pi}{2} \text{ または } z = \alpha \\ \iff & \frac{z-\alpha}{\beta} \text{ は純虚数 または } 0 \text{ である} \\ \iff & \boldsymbol{\frac{z-\alpha}{\beta} + \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)} = 0} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

分母を払って式を整理すると

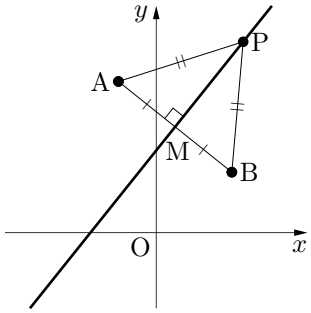
$$\overline{\beta}(z-\alpha)+\beta(\overline{z}-\overline{\alpha})=0$$
$$\therefore\quad \overline{\beta}z+\beta\overline{z}-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)=0$$

これは直線の一般式

$$\boldsymbol{\overline{\lambda}z\pm\lambda\overline{z}+\mu=0\ (\mu\ \text{は実数})}$$

に含まれる．

4　垂直二等分線



教科書の例題として扱われているのが垂直二等分線である．

異なる 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$ とおくと，線分 AB の垂直二等分線は

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$$

を満たす点 $\mathrm{P}(z)$ の集合である．これを複素数で表すと

$$\boldsymbol{|z-\alpha|=|z-\beta|}$$

であり，これを直線の一般式の形に直すと

$$|z-\alpha|^2=|z-\beta|^2$$
$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$
$$z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+\beta\overline{\beta}$$
$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=0\quad(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}\ \text{は実数})$$

となる．

- 異なる 2 点 A，B の中点を M とおくと，線分 AB の垂直二等分線は点 M を通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と垂直な直線である．点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$ とおくと，線分 AB の垂直二等分線上の点 $\mathrm{P}(z)$ は

  $$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$$

  を満たす．これを複素数で表すと

  $$\arg\frac{z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{2}\ \text{または}\ z=\alpha$$
  $$\iff\frac{z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\ \text{は純虚数 または 0 である}$$
  $$\iff\frac{z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}+\overline{\left(\frac{z-\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta-\alpha}\right)}=0$$
  $$\iff(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\left(z-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+(\beta-\alpha)\left(\overline{z}-\frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{2}\right)=0\quad(\because\ \alpha\neq\beta)$$
  $$\therefore\quad(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=0\quad(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}\ \text{は実数})$$

  を得る．

5　直線の一般式

複素数平面上での直線の一般式は

$$(*)\quad \boldsymbol{\overline{\lambda}z \pm \lambda\overline{z} + \mu = 0},\quad \lambda\overline{z}\text{につく符号が}\begin{cases} - \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu}\text{ は純虚数または }\mathbf{0} \\ + \text{ のとき，} & \boldsymbol{\mu}\text{ は実数} \end{cases}$$

であることは **1** で触れた．

実平面上の直線 $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ 上の点 $(x,\ y)$ を $z = x + yi$ とし，この直線の方程式を複素数で表してみよう．

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2},\quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

であるから

$$a\frac{z+\overline{z}}{2} + b\frac{z-\overline{z}}{2i} + c = 0$$
$$ai(z+\overline{z}) + b(z-\overline{z}) + 2ci = 0$$
$$(ai+b)z + (ai-b)\overline{z} + 2ci = 0$$
$$(b+ai)z - (b-ai)\overline{z} + 2ci = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

① において $\lambda = b - ai,\ \mu = 2ci$ とおくと

$$\boldsymbol{\overline{\lambda}z - \lambda\overline{z} + \mu = 0}\ (\boldsymbol{\mu}\text{ は純虚数 または }\mathbf{0})$$

① の辺々にに $-i$ をかけると

$$(a-bi)z + (a+bi)\overline{z} + 2c = 0$$

が得られ，$\lambda = a + bi,\ \mu = 2c$ とおくと

$$\boldsymbol{\overline{\lambda}z + \lambda\overline{z} + \mu = 0}\ (\boldsymbol{\mu}\text{ は実数})$$

が得られる．

> 次の方程式を満たす点 z 全体を図示せよ．
>
> (1) $(1-2i)z + (1+2i)\overline{z} + 3 = 0$
>
> (2) $(1-2i)z - (1+2i)\overline{z} + 3i = 0$

【解答】

$z = x + yi$ (x, y は実数) として，与式に代入する．

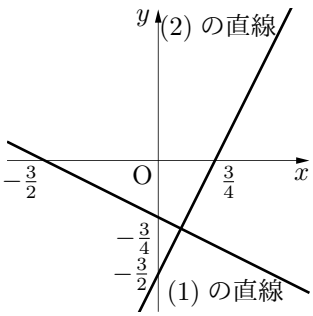
(1) $(1-2i)(x+yi) + (1+2i)(x-yi) + 3 = 0$ を整理すると

$$\{(x+2y) + (-2x+y)i\} + \{(x+2y) + (2x-y)i\} + 3 = 0$$
$$\therefore\quad 2x + 4y + 3 = 0$$

(2) $(1-2i)(x+yi) - (1+2i)(x-yi) + 3i = 0$ を整理すると

$$\{(x+2y) + (-2x+y)i\}$$
$$- \{(x+2y) + (2x-y)i\} + 3i = 0$$
$$(-4x+2y+3)i = 0$$
$$\therefore\quad 4x - 2y - 3 = 0$$

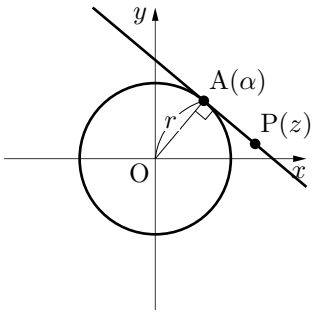
(1)，(2) を満たす z の全体はどちらも直線であり，図示すると右図となる．



6　円の接線

原点 O を中心とする半径 r の円上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ における円の接線の方程式を求めよ．

【解答】



接線上の点を $\mathrm{P}(z)$ とおく．P は点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直な直線上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

を満たす．これを複素数で表すと

$$\begin{aligned}
&\arg \frac{z-\alpha}{\alpha} = \pm\frac{\pi}{2} \text{ または } z = \alpha \\
\iff\ &\frac{z-\alpha}{\alpha} \text{は純虚数 または 0 である} \\
\iff\ &\boldsymbol{\frac{z-\alpha}{\alpha} + \overline{\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)} = 0} \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

分母を払って式を整理すると

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}(z-\alpha) + \alpha(\overline{z}-\overline{\alpha}) = 0 \\
\therefore\ &\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} - 2\alpha\overline{\alpha} = 0 \\
\therefore\ &\boldsymbol{\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = 2r^2} \quad (\because\ |\alpha| = r)
\end{aligned}$$

である．

- 実平面において円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ における円の接線の方程式は

  $$ax + by = r^2$$

  であった．$\alpha = a+bi$ ($a,\ b$ は実数，i は虚数単位)，接線上の点 $\mathrm{P}(z)$ を $z = x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおくと

  $$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

  であるから

  $$\begin{aligned}
  &a\frac{z+\overline{z}}{2} + b\frac{z-\overline{z}}{2i} = r^2 \\
  &ai(z+\overline{z}) + b(z-\overline{z}) = 2r^2 i
  \end{aligned}$$

  辺々に $-i$ を掛けると

  $$\begin{aligned}
  &(a-bi)z + (a+bi)\overline{z} = 2r^2 \\
  \therefore\ &\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = 2r^2
  \end{aligned}$$

  を得る．