今年の入試で気になった問題
— 通過領域問題を中心に —

東京都立戸山高等学校

2023 年 10 月 14 日 (土)

目 次

1 とりうる値の範囲 **1**

2 実数解をもつ条件 **4**

3 直線の通過領域 **5**

4 線分の通過領域と体積 **6**

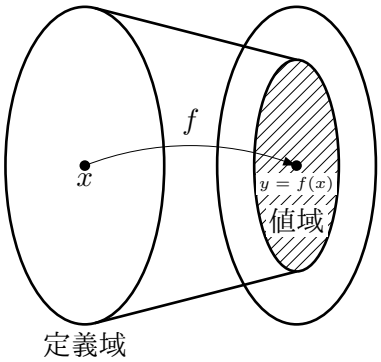
5 図形の通過領域と体積 **7**

これは 2023 年 10 月 14 日 (土) 東京都立戸山高等学校で行った研究会の概略を記したものです．8 月末に先生方と顔を合わせる機会があり,「次回の研究会ですが，何か要望はありませんか」と尋ねたところ「通過領域をもう一度」という話がありました．通過領域は拙著「軌跡・領域　分野別標準問題精講」を教材にしてこの研究会で 3 回に分けて話したことがあります．今回は

「今年の入試で気になった問題
　– 通過領域問題を中心に –　」

をとして 2023 年の問題を題材にして通過領域について問題を並べてみました．

1　とりうる値の範囲



定義域と**関数**が与えられると，関数値 $f(x)$ の集合として**値域 (とりうる値の範囲)** が決まります．すなわち，値域とは $y=f(x)$ を満たす y の集合です．

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，関係 $y=f(x)$ を満たすような点 $(x,\ y)$ 全体で作られる図形を，この関数の**グラフ**といいます．定義域における関数 $y=f(x)$ のグラフをかけば，y の値域 (とりうる値の範囲) を求めることができます．

与えられた関数のグラフをかくのが困難なときもあります．そのようなときは値域の定義にもどりましょう．「y が値域の中の値である」ということは，「$y=f(x)$ を満たす x が存在する」ということなので，y の値域 (とりうる値の範囲) とは $y=f(x)$ を満たす x が存在するような y の集合のことです．

値域の求め方をまとめておきます．

(i) $y=f(x)$ のグラフをかく．
(ii) $y=f(x)$ となる x が少なくとも 1 つ存在するような y の集合を求める．

1 (1)

2 つの実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$z=2x+y$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(23 立教大 コミュニティ福祉・経営・経済など 1(2)) (解答例)

1 (2)

2 次方程式 $x^2-bx+10=0$ が $2<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつとき，実数 b のとりうる値の範囲は $\boxed{①}$ である．

(23 関西大 全学日程 理系 2 月 7 日 4(1)) (解答例)

$\boxed{1}$(1) で $z=2x+y$ のグラフを描こうとすると，定義域は xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ で，グラフは xyx 空間での曲線となります．図形でいうと円柱面 $x^2+y^2=1$ (z は任意) と平面 $2x+y-z=0$ の交わりを描くことになります．これはツライ．z を 2 変数の関数とみるからツライのです．$x,\ y$ は $x^2+y^2=1$ を満たすから

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ x=\sin\theta \end{cases}$$

とパラメータ表示することができます．これを用いると z を 1 変数の関数として表すことができます．

(ii) の考え方を用いて，与えられた条件を満たす $x,\ y$ が存在するための z の条件を求めてもよいでしょう．すなわち，「xy 平面上で円 $x^2+y^2=1$ と直線 $2x+y=z$ が共有点をもつような z の条件」を求めます．

$\boxed{1}$(2) はストレートに「〜という条件を満たす x が少なくも 1 つもつような b の条件」として (ii) の考え方が問われています．**解の配置**の問題は数学 I での必須事項です．2 次関数のグラフを

判別式 (あるいは頂点の y 座標),
軸の位置,
端点の関数値の符号

に注意しながら描きましょう．

与えられた等式を $b = x + \dfrac{10}{x}$ と変形し，xb 平面にグラフを描くことにより b の値域を求めることもできます．

3 次方程式，4 次方程式の実数解を問う問題もあります．

【1 − 1】

k を実数として，x についての方程式

$$x^3 - x^2 - kx + 3 - 2k = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $(*)$ について，$0 < x < 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個であるような k の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ について，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個であるような k の値を求めよ．

(23 弘前大 理工 9) (解答例)

【1 − 2】

x の 4 次方程式

$$3x^4 - 10x^3 + ax^2 - 10x + 3 = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．ただし a は実数の定数である．$x = 0$ は方程式 $(*)$ の解ではないので，以下 $x \neq 0$ とする．

(1) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく．x が 0 でない実数を動くとき，t のとり得る値の範囲は $t \leqq \square$，$\square \leqq t$ である．また，$x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + b$ とおくと $b = \square$ である．

(2) 方程式 $(*)$ を $t = x + \dfrac{1}{x}$ の 2 次方程式として表せば $\square t^2 - \square t + a - \square = 0$ となる．

(3) x の方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲は $a \leqq \square$ である．

(4) x の方程式 $(*)$ が相異なる 4 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲は $a < \square$ である．

(23 青山学院大 理工) (解答例)

【1 − 1】は定数 k を分離します．$(*)$ は

$$x^3 - x^2 + 3 = k(x+2)$$

と変形され，$x + 2 \neq 0$ が確認できるので

$$(*) \iff \frac{x^3 - x^2 + 3}{x+2} = k$$

であり，曲線 $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x+2}$ と直線 $y = k$ の共有点をしらべればよいことになります．$y = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x+2}$ のグラフを描き終えると (1)，(2) は一気に解決します．

【1 − 2】の $(*)$ は 4 次の相反方程式です．(1) の置き換えは必須で，(3) までは流れるでしょう．

x の 4 次方程式 $(*)$ は t の 2 次方程式に直すことができます．

(4) では，t の 2 次方程式が異なる 2 実数解をもつだけでは不十分です．異なる 2 実数解 t_1，t_2 に対して，$t = x + \dfrac{1}{x}$ から異なる 2 つの x が得られ，t_1，t_2 から得られた 4 つの x がすべて異なることを示さなければいけません．

2　実数解をもつ条件

2

$a,\ b$ を実数とする．θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

(23 大阪大 文系 1) (解答例)

変数の統一を考えて $\cos 2\theta$ を 2 倍角の公式を用いて $\sin\theta$ で表します．$t = \sin\theta$ とおくと，与えられた方程式は t についての 2 次方程式になります．この t についての 2 次方程式が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような $a,\ b$ の条件を求めます．2 次方程式の解の配置の問題ですね．

t についての 2 次方程式を ab 平面上の直線の方程式とみることもできます．このようにみたとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲とは ab 平面における直線の通過領域を意味します．

t でパラメータ表示された直線

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

の通過領域の求め方として

(i) $(*)$ を満たす実数 t が少なくとも 1 つ存在するよう点 $(x,\ y)$ の集合を求める．
(ii) $(*)$ において x を固定して，t を動かしたときの y の値域を求める．
(iii) 包絡線をみつける．

があります．

【2 − 1】

(1) 関数

$$y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x} \quad (0 < x < \pi)$$

の増減と極値を調べ，そのグラフの概形を描け．ただしグラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) a を実数の定数とする．x についての方程式

$$-\cos 3x = a\sin^3 x$$

が $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲に実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(23 青山学院大 理工 4) (解答例)

(1) は (2) のヒントで,「定数 a を分離」することを示唆しています．(2) では (1) の関数のグラフを $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲で描き，$y = -\dfrac{\cos 3x}{\sin^3 x}$ のグラフと直線 $y = a$ が共有点をもつような a の値の範囲を求めます．

3　直線の通過領域

3

実数 a に対して，座標平面上の放物線 $C_1 : y = x^2 - 1$ と放物線 $C_2 : y = \dfrac{1}{2}(x-a)^2$ の共有点を P，Q とし，P，Q を通る直線を l とする．

(1) 直線 l の方程式を求めよ．
(2) a が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たしながら動くとき，l が通過しうる領域 D を図示せよ．
(3) a が (2) の範囲を動くとき，線分 PQ が通過しうる領域の面積を求めよ．

(23 東京海洋大 海洋工 4–I) (解答例)

さて，いよいよ直線の通過領域が前面に出た問題の登場です．

(1) でパラメータを含む直線の方程式を求めます．交点を求めずに直線の方程式を求めることはできますが，この解法の答案は少ないでしょう．

$$f(x,\ y) + kg(x,\ y) = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

をみて束 (そく) と気づいてもらえるでしょうか．

(2) 通過領域を求めるためのいろいろな解法を確認しておきましょう．

(3) 直線 l，すなわち直線 PQ の通過領域を求めた後の線分 PQ の通過領域です．放物線 C_1 (あるいは C_2) は下に凸な曲線ですから，線分 PQ はつねに放物線 C_1 (あるいは C_2) の上側 (曲線上の点も含む) にあります．考える領域は (2) の領域かつ放物線 C_1 (あるいは C_2) の上側 (曲線上の点も含む) となります．

【3 − 1】

$k,\ m$ を実数とする．$y = kx - k^2 - m$ で表される xy 平面内の直線を l とする．k が実数全体を動くとき，l が通過する領域を D_m とする．点 $(x,\ y)$ が領域 D_m 全体を動くとき，$x^2 + y^2$ は最小値をもつ．その最小値を $S(m)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) l が原点を通るような k が存在するための m の条件を求めよ．
(2) 領域 D_m を不等式を用いて表せ．
(3) $S(4)$ の値と，その値をとるときの点 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．
(4) $S(m)$ を求めよ．

(23 岐阜大 後 工 5) (解答例)

(1) は (2) へのココロの準備です．

(2)(1) の準備があるので，(i) の方針，すなわち l の通過領域 D_m は，与えられた等式を満たす実数 k が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合を求めるという方針をとりましょう．

(3) は (4) の準備で，$S(m)$ は原点 $(0,\ 0)$ と領域 D_m 内の点 $(x,\ y)$ との距離の最小値を求めています．

(4) は場合分けが生じます．

4　線分の通過領域と体積

4

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．
(b) 点 Q は yz 平面上にある．
(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

(23 京都大 理系 5) (解答例)

まず，線分 PQ の通過領域をおさえましょう．問題文を把握するのに試行錯誤の時間が必要です．これが一ヤマ．通過領域の求め方が式で描ければ，ヤマは越えていて，後は体積の計算を済ますだけです．

P，Q の 2 点が動くので，まずは 1 点 P を固定します．(a) より P は x 軸上の点なので $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$ とします．(c) より Q は

$$\mathrm{OQ} = 1 - \mathrm{OP} = 1 - |t|$$

です．これにより t は $-1 \leqq t \leqq 1$ という条件が付きます．さらに (b) であることにも注意すると，点 Q は yz 平面上で原点 O を中心とする半径 $1-|t|$ の円周を描くことが分かります．このとき，線分 PQ が通過してできる曲面は，P を頂点し OP を軸とする直円錐の側面です．点 Q を y 軸上の点 $(0,\ 1-|t|,\ 0)$ としてもよいことが分かります．線分 PQ を xy 平面上の線分として捉えることができました．

つぎに P を動かします．y 軸に関する対称性より $0 \leqq t \leqq 1$ としてよいことも分かります．このときの線分 PQ の通過領域 D を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積の 2 倍が求める体積です．ここまでが一ヤマです．

通過領域 D を包絡線から求めるのは高校の範囲を超えます (そう難しいわけではありませんが，訳もわからず解き方を覚えて答としての数値を求めるという学び方は避けたい．拙著「軌跡・領域　分野別標準問題精講」49 の参考 (206 頁) に証明を記しました)．t が存在するような点 $(x,\ y)$ の集合を求めるのツライ．ここは x 固定でいくことにしましょう．得られた領域に現れた曲線は放物線です．

最後の積分計算は大した計算ではありません．

【4 − 1】

t を実数とし，座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ t^2-1\right)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1}\right)$ を考える．t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ．

(23 信州大 医 7) (解答例)

Q の y 座標は汚いですが，座標をみると P は z 軸上を，Q は平面 $y=1$ 上を動くので，線分 PQ は Q が通過してできる曲面は $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲に存在します．平面 $y=u$ $(0 \leqq u \leqq 1)$ による切り口を考えましょう．

5　図形の通過領域と体積

5

xyz 空間において，3 点 A(2, 1, 2)，B(0, 3, 0)，C(0, -3, 0) を頂点とする三角形 ABC を考える．以下の問に答えよ．

(1) ∠BAC を求めよ．

(2) $0 \leqq h \leqq 2$ に対し，線分 AB，AC と平面 $x = h$ との交点をそれぞれ P，Q とする．点 P，Q の座標を求めよ．

(3) $0 \leqq h \leqq 2$ に対し点 $(h,\ 0,\ 0)$ と線分 PQ の距離を h で表せ．ただし，点と線分の距離とは，点と線分上の点の距離の最小値である．

(4) 三角形 ABC を x 軸のまわりに 1 回転させ，そのときに三角形が通過する点全体からなる立体の体積を求めよ．

(23 早稲田大 理工 5) (解答例)

三角形 ABC を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めるという体積の典型問題です．最近は少なくなった気がしますが，以前はよく出題されていました．親切な誘導がついていますが，誘導がなくても回転軸に垂直な平面 $x = h$ による切り口を考えるのが常套手段です．

(3) で場合分けが生じます．ここを乗り越えれば積分計算はそれほどではありません．

(1) は体積を求めるのには不要な設問であり，点を取らせたいという出題者の配慮でしょう．

【5 − 1】

xyz 空間内で 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$ を頂点とする正方形の周および内部を K とし，K を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を K_x，K を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を K_y とする．さらに，K_x と K_y の共通部分を L とし，K_x と K_y の少なくともどちらか一方に含まれる点全体からなる立体を M とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) K_x の体積を求めよ．

(2) 平面 $z = t$ が K_x と共有点をもつような実数 t の値の範囲を答えよ．また，このとき，K_x を平面 $z = t$ で切った断面積 $A(t)$ を求めよ．

(3) 平面 $z = t$ が L と共有点をもつような実数 t の値の範囲を答えよ．また，このとき，L を平面 $z = t$ で切った断面積 $B(t)$ を求めよ．

(4) L の体積を求めよ．

(5) M の体積を求めよ．

(23 京都産大 理・情報理工) (解答例)

K_x，K_y は半径 1，高さ 1 の直円柱であり，K_x の平面 $z = t$ による切り口は長方形となります．

また，共通部分 L の切り口は「切り口の共通部分」で，和集合 M の切り口は「切り口の和集合」です．立体を切り，考える対象を平面に下ろして考えるということが問われています．計算はほとんどありません．