千葉大学の微分についての問題

千葉県立長生高等学校

2025 年 12 月 5 日 (金)

目 次

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部	学科等	解答する問題番号
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B 数学 C	国際教養学部 文学部 法政経学部 教育学部 園芸学部 先進科学プログラム	 人文学科（行動科学コース） 小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 食料資源経済学科 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	1 2 3
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B 数学 C	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	3 4 5 6 7 8
	理学部 工学部 情報・データサイエンス学部 園芸学部 薬学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科 園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科 物理学関連分野，工学関連分野 情報・データサイエンス関連分野	4 5 6 7 8
	理学部	数学・情報数理学科	4 5 6 7 8 9
	医学部		5 6 7 8 9

過去 6 年の出題

25 年

$\boxed{1}$ (1) 数 II (対数)　桁数と最高位の数字
(2) 数 II (微分)　3 次方程式が虚数解をもつ
$\boxed{2}$ 数 A (確率)　さいころ投げでの目の総和の確率
$\boxed{3}$ 数 C (平面ベクトル)　内積の計算と軌跡
$\boxed{4}$ 数 B (数列)　数学的帰納法と分数漸化式
$\boxed{5}$ 数 A(確率)　3 方向に進むランダムウォーク
$\boxed{6}$ 数 III(積分)　接する 2 曲線と面積
$\boxed{7}$ 数 III(微分)　グラフの概形と曲線外の点からの接線
$\boxed{8}$ 数 C(複素数平面)　凸四角形の各辺に接する正方形の中心について
$\boxed{9}$ 数 III(微分)　平均値の定理

24 年

$\boxed{1}$ 数 II (対数)　三角形の存在条件と対数不等式
$\boxed{2}$ 数 A (確率)　3 色の球による非復元事象の確率
$\boxed{3}$ 数 I (2 次関数)　絶対値付き 2 次関数のグラフ
$\boxed{4}$ (1) 数 III (積分)　三角関数の部分積分
(2) 数 C (複素数平面)　正三角形をつくる
(3) 数 A (場合の数)　二項係数
$\boxed{5}$ 数 A，数 III (確率，極限)　2 本の線分上の 3 点を結ぶ図形の面積と極限
$\boxed{6}$ 数 III (積分)　回転体の体積
$\boxed{7}$ 数 II・数 III (微分)　3 次方程式の解と極限
$\boxed{8}$ 数 III (極限)　3 つの円の内接・外接と極限
$\boxed{9}$ 数 III (極限)　二項係数を係数にもつ多項式と極限

23 年

$\boxed{1}$ 数 II (図形と方程式)　直線の方程式と点の軌跡

$\boxed{2}$ 数 A (確率)　さいころ投げによる得点の確率

$\boxed{3}$ (1) 数 I (2 次関数)　絶対値付き 2 次関数のグラフと直線の共有点の個数

(2) 数 II (積分)　定積分で表された関数

$\boxed{4}$ 数 III (微分)　指数関数の最大値の極限とそのときの x の極限 (e の定義)

$\boxed{5}$ 数 B (平面ベクトル)　三角形の外心

$\boxed{6}$ 数 A (確率)　数直線上の動点と確率

$\boxed{7}$ 数 III (積分)　絶対値付き関数の定積分と最大値

$\boxed{8}$ 数 III (複素数平面)　$z^n = i$ を満たす複素数 z の実部，虚部

$\boxed{9}$ 数 III (微分)　$tx - f(x)$ の最大値

22 年

$\boxed{1}$ 数 A (確率)　円周上の 12 個の点を移動する点についての確率

$\boxed{2}$ 数 I (三角比)　三角形内の二等辺三角形

$\boxed{3}$ 数 II (面積)　絶対値付き 2 次関数のグラフと面積

$\boxed{4}$ 数 A (整数)　4 桁の数字の入れ換えについての証明問題

$\boxed{5}$ 数 A (確率)　n 個のサイコロの出た目の積 M についての確率

$\boxed{6}$ 数 B (空間ベクトル)　空間内の直線と xy 平面上の放物線

$\boxed{7}$ 数 A 数 B (整数，数列)　2 次の不定方程式と 3 項間漸化式

$\boxed{8}$ 数 III (積分)　定積分と不等式，極限

$\boxed{9}$ 数 III (微分)　関数がつねに増加する

21 年

$\boxed{1}$ 数 II (2 次関数)　円，円環の面積と最大値

$\boxed{2}$ 数 B (数列)　直線と円に外接する円の列

$\boxed{3}$ 数 A (確率)　球とさいころによる得点についての確率

$\boxed{4}$ 数 B (数列)　領域において条件を満たす点の個数

$\boxed{5}$ 数 A (確率)　球とさいころによる得点についての確率

$\boxed{6}$ 数 II (図形と方程式，微分)　軌跡，方程式への応用

$\boxed{7}$ 数 III (複素数)　複素数の極形式

$\boxed{8}$ 数 III (積分)　指数関数，対数関数のグラフと面積および極限

$\boxed{9}$ 数 III (微分)　多項式の列と数学的帰納法

20 年

$\boxed{1}$ 数 A (確率)　カードによる確率

$\boxed{2}$ 数 II (微分)　3 次関数のグラフと接線

$\boxed{3}$ 数 B (数列)　相似な四角形の列

$\boxed{4}$ 数 III (積分)　回転体の体積と最大値

$\boxed{5}$ 数 B (空間ベクトル)　四面体

$\boxed{6}$ 数 A (確率)　カードに書かれた数の和と条件付き確率

$\boxed{7}$ 数 II (微分)　2 つの曲線に接する 3 本の直線

$\boxed{8}$ 数 III (複素数平面)　相似な三角形の列

$\boxed{9}$ 数 B 数 III (数列，数列の極限)　二項係数の和と極限

$\boxed{10}$ 数 A (整数)　複素数の実部，虚部が整数であることの証明

$\boxed{11}$ 数 III (積分)　定積分と不等式，関数列の極限

		2025	2024	2023	2022	2021	2020
数学 I	数と式						
数学 I	集合と命題						
数学 I	2 次関数		$\boxed{3}$	$\boxed{3}$(1)		$\boxed{1}$	
数学 I	図形と計量				$\boxed{2}$		
数学 I	データの分析						
数学 A	場合の数		$\boxed{4}$(3)				
数学 A	確率	$\boxed{2}$, $\boxed{5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$, $\boxed{6}$	$\boxed{1}$, $\boxed{5}$	$\boxed{3}$, $\boxed{5}$	$\boxed{1}$, $\boxed{6}$
数学 A	整数の性質				$\boxed{4}$		$\boxed{10}$
数学 A	図形の性質						
数学 II	式の証明						
数学 II	複素数と方程式						
数学 II	図形と方程式			$\boxed{1}$			
数学 II	三角関数						
数学 II	指数・対数	$\boxed{1}$(1)	$\boxed{1}$				
数学 II	微分	$\boxed{1}$(2)				$\boxed{6}$	$\boxed{2}$, $\boxed{7}$
数学 II	積分			$\boxed{3}$(2)	$\boxed{3}$		
数学 B	数列	$\boxed{4}$			$\boxed{7}$	$\boxed{2}$, $\boxed{4}$	$\boxed{3}$
数学 B	統計的な推測						
数学 III	関数						
数学 III	数列の極限		$\boxed{5}$, $\boxed{9}$				$\boxed{9}$
数学 III	関数の極限		$\boxed{7}$, $\boxed{8}$				
数学 III	微分法	$\boxed{7}$, $\boxed{9}$		$\boxed{4}$, $\boxed{9}$	$\boxed{9}$	$\boxed{9}$	
数学 III	積分法	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$(1), $\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$, $\boxed{11}$
数学 C	ベクトル	$\boxed{3}$		$\boxed{5}$	$\boxed{6}$		$\boxed{5}$
数学 C	複素数平面	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$(2)	$\boxed{8}$		$\boxed{7}$	$\boxed{8}$
数学 C	式と曲線						

文系数学

文系学部 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ (80 分)

- 確率は必ず出題される．ついで，2 次関数，数学 II の微分積分もよく出題される．
- データの分析，統計的な推測からは出題されていない．

理系数学

教育学部 (中学校) $\boxed{3}$〜$\boxed{8}$ (150 分)

理系学部 $\boxed{4}$〜$\boxed{8}$ (120 分)

理学部 (数学・情報数理) $\boxed{4}$〜$\boxed{9}$ (180 分)

医学部 $\boxed{5}$〜$\boxed{9}$ (120 分)

- 2024 年での出題はないが確率は頻出問題．同じく数学 III の微分積分，複素数平面，ベクトルも頻出分野である．
- データの分析，統計的な推測からは出題されていない．
- 難問もあるが，入試の典型問題も多く出題される．まずは典型問題を標準入試問題集などを終了させ，千葉大ならではの難問は類題を探すのではなく，その問題を研究し尽くすことを薦める．

1　数学 II の微分 (+α)

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を正の整数とする．x の関数

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$$

について以下の問いに答えよ．

(1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする．$f\left(\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする．極限 $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ を求めよ．

(24 千葉大 7)

参考問題

【1 – 1】a を実数とする．方程式

$$x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

が虚数解を持つ a の範囲を求めよ．

(25 千葉大 1(2))

【1 – 2】k を定数とし，$f(x) = x^3 - kx$ とおく．曲線 $C : y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる．点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする．さらに，C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする．ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ．

(20 千葉大 2)

【1 – 3】a は 0 でない定数とする．2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = \dfrac{1}{2a}y^2 + \dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ．

(20 千葉大 7)

2　極限

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2 つの実数 $a,\ b$ は $0 < b < a$ を満たすとする．関数

$$f(x) = \frac{1}{b}(e^{-(a-b)x} - e^{-ax})$$

の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す．ここで，e は自然対数の底である．

(1) $X(a,\ b)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} X(a,\ b)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0} M(a,\ b)$ を求めよ．

(23 千葉大 4)

参考問題

【2 – 1】半径 1，中心 O の円 C がある．2 つの円 C_1 と C_2 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する．
- C_1 と C_2 は互いに外接する．

円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ D，E とし，半径をそれぞれ $p,\ q$ とする．$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) q を p と θ を用いて表せ．

(2) p を固定する．θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ．

さらに，円 C_3 が次の 2 つの条件を満たすとする．

- C_3 と C_1 は半径が等しい．
- C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する．

このとき以下の問いに答えよ．

(3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき，q の値を求めよ．

(4) θ が 0 に近づくとき，$\dfrac{q}{p}$ の極限値を求めよ．

(24 千葉大 8)

3　数学 III の微分

$\boxed{\mathbf{3}}$ r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える．

(1) $r=1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ．

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ．

条件：$0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する．

(22 千葉大 9)

参考問題

【3 – 1】すべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x) = \frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)=0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(2) $f''(x)=0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(3) $y=f(x)$ の凹凸，変曲点，ならびに漸近線を調べて，そのグラフの概形を描け．

(4) 点 $(0,\ t)$ から曲線 $y=f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ．

(25 千葉大 7)

4　平均値の定理

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx-f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く．

(1) $f(x)=x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する．この $g(t)$ を求めよ．

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする．

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a<b$ ならば $f'(a)<f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx-f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ．

(3) s を実数とする．t が実数全体を動くとき，t の関数 $st-g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ．

(23 千葉大 9)

参考問題

【4 − 1】関数 $f(x)$ は 3 次導関数 $f'''(x)$ を持ち，$f'(0)=0$ であり，すべての実数 x に対して $f''(x)>0,\ f'''(x)<0$ を満たすものとする．また，$0<a<b$ とし，

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $F>0$ を示せ．

(2) $F<\dfrac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}(b-a)$ を示せ．

(3) $f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)<\dfrac{b-a}{2}f'(b)$ を示せ．

(4) $F<\dfrac{(b-a)^3}{4}f''(a)$ を示せ．

(25 千葉大 9)

5　解答例

$\boxed{1}$　$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$$

(1) α は $f(x)=0$ の解の 1 つであるから

$$f(\alpha) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．このとき

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 - 2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + (2n-3)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + 1 \\ &= \frac{1-2n(1-\alpha)+(2n-3)(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{1-2n(1-\alpha)+(2n-3)(1-2\alpha+\alpha^2)+(1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3)}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{-1-(2n-3)\alpha+2n\alpha^2-\alpha^3}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{-f(\alpha)}{(1-\alpha)^3} \\ &= \mathbf{0} \quad (\because\ ①) \end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $x=0,\ 1$ を代入すると，n に関係ない関数値 $f(x)$ が得られる．

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = 1 - 2n + (2n-3) + 1 = -1 < 0$$

であり，区間 $0 < x < 1$ に少なくとも 1 つ $f(x)=0$ となる x が存在する．

さらに，$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{2n}{x} + \dfrac{2n-3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ と変形すると

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ であり，区間 $x<0$ に少なくとも 1 つ $f(x)=0$ となる x が存在する．

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であり，区間 $1<x$ に少なくとも 1 つ $f(x)=0$ となる x が存在する．

3 次方程式 $f(x)=0$ の実数解は高々3 個であるから，$f(x)=0$ は 3 つの区間

$$x<0,\ 0<x<1,\ 1<x$$

にそれぞれ解を 1 つずつもつ，すなわち，方程式 $f(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつ．　…… (証明終わり)

(3) $f(x)=0$ の異なる 3 つの解を $\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n$ $(\alpha_n < 0 < \beta_n < 1 < \gamma_n)$ とおくと，β_n は 2 番目に大きい解である．

(1) より，$\dfrac{1}{1-\alpha_n}$，$\dfrac{1}{1-\beta_n}$，$\dfrac{1}{1-\gamma_n}$ も $f(x)=0$ の異なる 3 つの解であり

$$-\alpha_n > 0 > -\beta_n > -1 > -\gamma_n$$
$$1-\alpha_n > 1 > 1-\beta_n > 0 > 1-\gamma_n$$
$$\therefore\quad \frac{1}{1-\gamma_n} < 0 < \frac{1}{1-\alpha_n} < \frac{1}{1-\beta_n}$$
$$\therefore\quad \alpha_n = \frac{1}{1-\gamma_n},\quad \beta_n = \frac{1}{1-\alpha_n},\quad \gamma_n = \frac{1}{1-\beta_n}$$

であり

$$\beta_n = \frac{1}{1-\alpha_n} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\gamma_n}} = \frac{1-\gamma_n}{-\gamma_n} = 1 - \frac{1}{\gamma_n}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 - 2n^3 + (2n-3)n + 1 \\ &= -n^3 + 2n^2 - 3n + 1 \\ &= -n^2(n-2) - 3n + 1 \\ &< 0 \quad (\because\ n \text{ は正の整数}) \end{aligned}$$

(2) より

$$1 \leqq n < \gamma_n \qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\gamma_n}\right) = \mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (1) を無視して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \beta_n$ $(0 < \beta_n < 1)$ を考える．

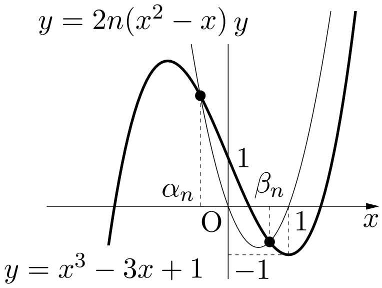
  $$f(x) = 0 \iff x^3 - 3x + 1 = 2n(x^2 - x)$$

  であり，$f(x)=0$ の解は 2 曲線 $y = x^3 - 3x + 1$，$y = 2n(x^2 - x)$ の共有点の x 座標である．

  $$y = 2n(x^2 - x) = 2n\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n}{2}$$

  であり，$n \to \infty$ のとき，$y = 2n(x^2 - x)$ の頂点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{n}{2}\right)$ は下方に移動し，区間 $0 < x < 1$ の範囲にある共有点の x 座標 β_n は 1 に近づくと推定される．

  この推定が成り立つことを証明する．



$$
\begin{aligned}
f\left(1-\frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 - 2n\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + (2n-3)\cdot\frac{n-1}{n} + 1 \\
&= \frac{(n^3-3n^2+3n-1) - 2n^2(n^2-2n+1) + n^2(2n^2-5n+3) + n^3}{n^3} \\
&= \frac{n^3-2n^2+3n-1}{n^3} \\
&= \frac{n^2(n-2)+3n-1}{n^3} \\
&> 0 \quad (\because\ n \text{ は正の整数})
\end{aligned}
$$

であり，$0 < 1 - \dfrac{1}{n} < 1$ と (2) より，$f(x) = 0$ の 2 番目に大きい解 β_n について

$$1 - \frac{1}{n} < \beta_n < 1 \quad \text{が成り立ち} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

である．はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = 1$$

である．

【1 – 1】 $$f(x) = x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とおく．a は実数であるから，実数係数の 3 次方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき，その共役複素数も解であるから

「$f(x) = 0$ が虚数解を持つ」

ということは

「$f(x) = 0$ が 1 つの実数解と互いに共役な複素数解をもつ」

ということであり

「$f(x) = 0$ の実数解はただ 1 つである」　　$\cdots\cdots (*)$

ということである．$y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点について調べる．

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

(i) $a < 0$ のとき，すべての x に対し $f'(x) > 0$ であり，$f(x)$ は単調増加である．$y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点は 1 個であり，$(*)$ を満たす．

(ii) $a = 0$ のとき，$f(x) = x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \left(x + 2^{-\frac{1}{6}}\right)\left(x^2 - 2^{-\frac{1}{6}}x + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$ であり

$$x^2 - 2^{-\frac{1}{6}}x + 2^{-\frac{1}{3}} = \left(x - \frac{2^{-\frac{1}{6}}}{2}\right)^2 - \frac{2^{-\frac{1}{3}}}{4} + 2^{-\frac{1}{3}} = \left(x - \frac{2^{-\frac{1}{6}}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot 2^{-\frac{1}{3}} > 0$$

であるから，$f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 $x = -2^{-\frac{1}{6}}$ をもつ．

(iii) $a > 0$ のとき，$f(x)$ は $x = \pm\sqrt{a}$ で極値をとるから

$$(*) \iff (\text{極大値})(\text{極小値}) > 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$$\begin{aligned}
(\text{極大値})(\text{極小値}) &= f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) \\
&= \left(-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}-4a^3 \\
&= \frac{1}{2}(1-2a)(1+2a+4a^2)
\end{aligned}$$

$1+2a+4a^2=4\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ であり，① であるための a の条件は

$$1-2a>0 \qquad \therefore \quad a<\frac{1}{2}$$

であり，$a>0$ とあわせて

$$0<a<\frac{1}{2}$$

である．

(i)，(ii)，(iii) をまとめると，求める a の範囲は

$$\boldsymbol{a<\frac{1}{2}}$$ ……(答)

である．

- $$f(x)=0 \iff x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}=3ax$$

曲線 $y=x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ と直線 $y=3ax$ の共有点について調べる．

$$y'=3x^2$$

であり，$y=x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上の点 $\left(t,\ t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線の方程式は

$$y=3t^2(x-t)+t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad y=3t^2x-2t^3+\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ㋐$$

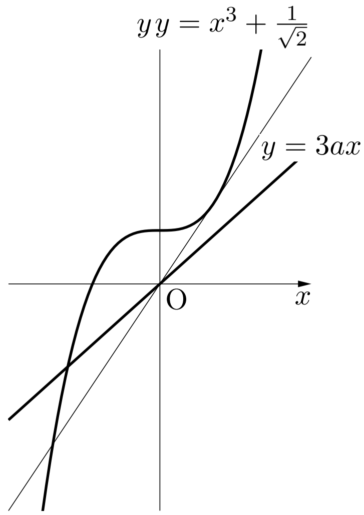
である．$y=3ax$ は a の値にかかわらず原点を通る直線であり，㋐ が原点を通るのは

$$0=-2t^3+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad t^3=\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときである．このとき ㋐ は

$$y=\frac{3}{2}x$$

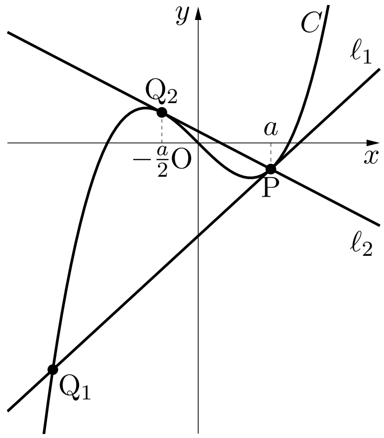


であり，求める a の範囲は

$$3a < \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad a < \frac{1}{2}$$

である．

【1 – 2】 $C : y = f(x) = x^3 - kx$



$$f'(x) = 3x^2 - k$$

C 上の点 $\left(t,\ t^3 - kt\right)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - k)(x - t) + t^3 - kt$$
$$\therefore \quad y = (3t^2 - k)x - 2t^3 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

である．これが C 上の原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ を通るから

$$a^3 - ka = (3t^2 - k)a - 2t^3$$
$$2t^3 - 3at^2 + a^3 = 0$$
$$(t - a)^2(2t + a) = 0$$
$$\therefore \quad t = a,\ -\frac{a}{2}$$

である．2 つの接線の傾き $f'(a),\ f'\left(-\frac{a}{2}\right)$ は

$$f'(a) = 3a^2 - k$$
$$f'\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a^2 - k$$
$$\therefore \quad f'\left(-\frac{a}{2}\right) < f'(a)$$

である．よって $\ell_1,\ \ell_2$ の方程式は

$$\boldsymbol{\ell_1 : y = (3a^2 - k)x - 2a^3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\boldsymbol{\ell_2 : y = \left(\frac{3}{4}a^2 - k\right)x + \frac{a^3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

また，C と接線 ① の共有点の x 座標は

$$x^3 - kx = (3t^2 - k)x - 2t^3$$
$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$
$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$
$$\therefore \quad x = t,\ -2t$$

であり，$\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$ は P でない方 ($x = a$ でない方) の共有点である．

$t = a$ のとき，共有点の x 座標は $x = a,\ -2a$ であり，Q_1 の x 座標は $-2a$ であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{Q}_1\left(-2a,\ -8a^3 + 2ka\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

$t=-\frac{a}{2}$ のとき，共有点の x 座標は $x=-\frac{a}{2}$，a であり，Q_2 の x 座標は $-\frac{a}{2}$ であるから

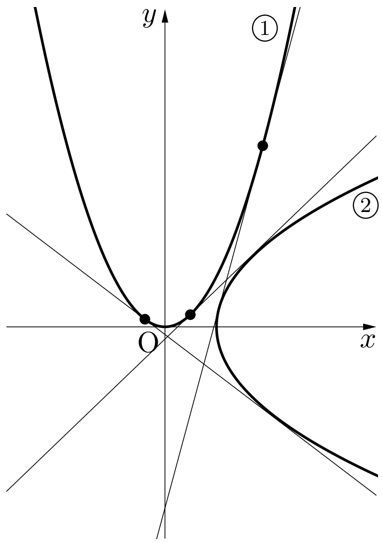
$$\mathbf{Q_2}\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}},\ -\frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

【1 − 3】

$$y=x^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$x=\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$



$(x^2)'=2x$ より，放物線 ① 上の点 $\left(t,\ t^2\right)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2$$

$$\therefore\quad y=2tx-t^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

である．直線 ③ が放物線 ② と接する条件は

$$y=2t\left(\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}\right)-t^2$$

$$\frac{t}{a}y^2-y+\frac{3}{2}at-t^2=0$$

が重解をもつことであり，$a\neq 0$ に注意すると

$$\begin{cases}\dfrac{t}{a}\neq 0\\ (-1)^2-4\cdot\dfrac{t}{a}\cdot\left(\dfrac{3}{2}at-t^2\right)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t\neq 0\\ a-6at^2+4t^3=0\end{cases}$$

$$\iff a-6at^2+4t^3=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．④ を満たす直線 ③ がちょうど 3 本となる条件は

④ を満たす実数 t が 3 つ存在する　　$\cdots\cdots(*)$

ことである．$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とおく．

$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

であり

$$\begin{aligned}(*) &\iff (\text{極大値})(\text{極小値})<0\\ &\iff f(0)f(a)<0\\ &\iff a(-2a^3+a)<0\end{aligned}$$

であるから，求める a の範囲は

$$a^2(2a^2-1)>0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a<-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<a} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $$f(x)=\frac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})\quad(0<b<a)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{b}\{-(a-b)e^{-(a-b)x}+ae^{-ax}\}\\&=\frac{e^{-ax}}{b}\{a-(a-b)e^{bx}\}\end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号は $a-(a-b)e^{bx}$ の符号と一致する．符号の変わり目は

$$e^{bx}=\frac{a}{a-b}\qquad\therefore\quad bx=\log\frac{a}{a-b}\quad\text{すなわち}\quad x=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

よって，最大値をとるときの x の値 $X(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{X(a,\ b)=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{b\to+0}X(a,\ b)&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{1}{1-\frac{b}{a}}\\&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)\log\left(1-\frac{b}{a}\right)\\&=\frac{1}{a}\lim_{b\to+0}\log\left(1-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

e の定義 $\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ により

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ より

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)\log\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a}\lim_{b\to+0}\frac{\log\left(1-\frac{b}{a}\right)}{-\frac{b}{a}}=\frac{1}{a}$$

としてもよい．

- $$\begin{aligned}\lim_{b\to+0}X(a,\ b)&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{\log a-\log(a-b)}{b}\\&=\lim_{b\to+0}\frac{\log(a-b)-\log a}{-b}\end{aligned}$$

$g(x) = \log x$ とおくと

$$\lim_{b \to +0} X(a,\ b) = g'(a) = \boldsymbol{\frac{1}{a}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $M(a,\ b)$ は $f(x)$ の最大値であるから

$$\begin{aligned} M(a,\ b) &= f\left(\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}\right) = \frac{1}{b}\left\{e^{-\frac{a-b}{b}\log\frac{a}{a-b}} - e^{-\frac{a}{b}\log\frac{a}{a-b}}\right\} \\ &= \frac{1}{b}\left\{\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a-b}{b}} - \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}}\right\} \\ &= \frac{1}{b}\left(\frac{a}{a-b} - 1\right)\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}} \end{aligned}$$

e の定義 $\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ により

$$\lim_{b \to +0} M(a,\ b) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e} = \boldsymbol{\frac{1}{ae}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (2) の利用を考えると見通しがよくなる．$X = X(a,\ b)$ とおくと

$$\begin{aligned} M(a,\ b) &= f(X) = \frac{1}{b}(e^{-(a-b)X} - e^{-aX}) = \frac{e^{-aX}}{b}(e^{bX} - 1) \\ &= e^{-aX} \cdot \frac{(e^{bX} - 1)}{bX} \cdot X \end{aligned}$$

(2) の結果と e の定義 $\lim_{h \to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ により

$$\lim_{b \to +0} M(a,\ b) = e^{-a \cdot \frac{1}{a}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{ae}$$

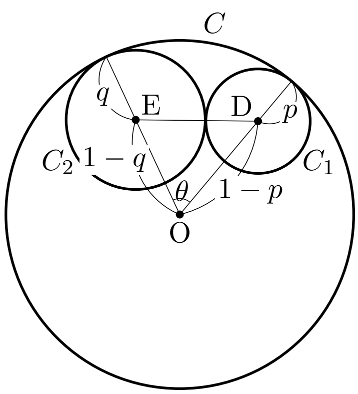
である．

【2 − 1】

(1) 3 つの円 C(中心 O, 半径 1)，C_1(中心 D, 半径 p)，C_2(中心 E, 半径 q) は 2 つの条件

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する．
- C_1 と C_2 は互いに外接する．

を満たす．



2 円が内接する $\iff$ (中心間の距離) = | 半径の差 |

2 円が外接する $\iff$ (中心間の距離) = (半径の和)

であるから

$$\mathrm{OD} = 1 - p, \quad \mathrm{OE} = 1 - q, \quad \mathrm{DE} = p + q$$

を満たす．$\theta = \angle\mathrm{DOE}$ であるから，$\triangle\mathrm{ODE}$ で余弦定理を用いると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{DE}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cos\theta \\
&(p+q)^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 - 2(1-p)(1-q)\cos\theta \\
&2pq = (1-2p) + (1-2q) - 2(1-p)\cos\theta + 2(1-p)q\cos\theta \\
&\{p+1-(1-p)\cos\theta\}q = 1-p-(1-p)\cos\theta \\
&\{1+p-(1-p)\cos\theta\}q = (1-p)(1-\cos\theta)
\end{aligned}
$$

C_1 は C に内接するから $p<1$ であり，$1+p-(1-p)\cos\theta \fallingdotseq 0$ であるから

$$
\boldsymbol{q = \frac{(1-p)(1-\cos\theta)}{1+p-(1-p)\cos\theta}} \qquad \cdots\cdots ① \qquad\qquad \cdots\cdots(答)
$$

である．

(2) p を固定する．(1) の結果より

$$
\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0}\frac{q}{\theta^2} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-p)\sin^2\theta}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)\theta^2} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\cos\theta\}(1+\cos\theta)}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\}\cdot 2}\cdot 1^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{1-p}{4p}} \qquad\qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

である．

(3) さらに，C_3 は次の 2 つの条件

- C_3 と C_1 は半径が等しい．
- C_3 は C に内接し，C_1，C_2 のどちらとも外接する．

を満たし，$p=\sqrt{2}-1$ であるから，円 C_3 の中心を F，半径を r とおくと

$$
\begin{aligned}
&r = p = \sqrt{2}-1 \\
&\mathrm{OF} = 1-r = 1-(\sqrt{2}-1) = 2-\sqrt{2} \\
&\mathrm{DF} = p+r = 2r = 2\sqrt{2}-2 \\
&\mathrm{EF} = q+r = q+\sqrt{2}-1
\end{aligned}
$$

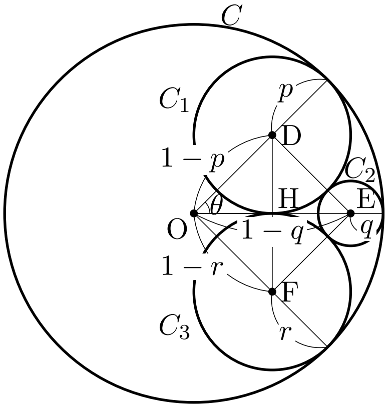
であり

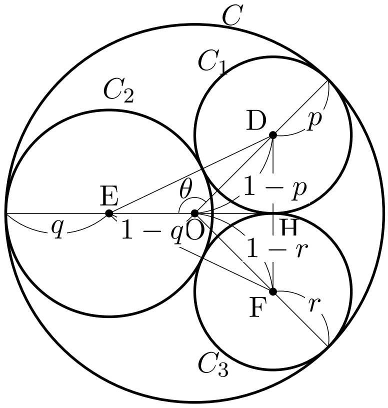
$$
\mathrm{OD}:\mathrm{OF}:\mathrm{DF} = (2-\sqrt{2}):(2-\sqrt{2}):(2\sqrt{2}-2) = 1:1:\sqrt{2}
$$

であるから，$\triangle\mathrm{ODF}$ は $\angle\mathrm{DOF} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である．このとき

$$
\theta = \frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{3}{4}\pi
$$

である．





$p=\sqrt{2}-1$ を ① に代入すると

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{2}=3-2\sqrt{2}$$

$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$$q=\frac{(2-\sqrt{2})\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{2^2-2}{2\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

である．よって，q の値は

$$\boldsymbol{q=3-2\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}+1}{7}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) C_1 と C_3 の接点を H とおくと

$$\mathrm{DH}=\mathrm{OD}\sin\angle\mathrm{DOH}$$

である．$\mathrm{DH}=p$, $\mathrm{OD}=1-p$，また $\angle\mathrm{DOH}=\theta$ または $\pi-\theta$ であるから $\sin\angle\mathrm{DOH}=\sin\theta$ であり

$$p=(1-p)\sin\theta \qquad \therefore\quad p=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

である．このとき，① は

$$\begin{aligned}q&=\frac{\left(1-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)(1-\cos\theta)}{1+\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}-\left(1-\dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)\cos\theta}\\&=\frac{1-\cos\theta}{(1+\sin\theta)+\sin\theta-\cos\theta}\\&=\frac{1-\cos\theta}{1+2\sin\theta-\cos\theta}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to0}\frac{q}{p} &= \lim_{\theta\to0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1+2\sin\theta-\cos\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\right)\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\cos\theta+2\sin\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta}\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{\{\sin^2\theta+2\sin\theta(1+\cos\theta)\}\sin\theta}\\
&= \lim_{\theta\to0}\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta+2(1+\cos\theta)}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

3

$$f(x)=x+\frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(1) $r=1$ のとき

$$\begin{aligned}
f(x)&=x+\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\\
f'(x)&=1-\frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\sin x\cos x\\
&=\frac{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}-\sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

であり，すべて x に対して $2\leqq 2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}\leqq 4\sqrt{2}$，$-1\leqq\sin 2x\leqq 1$ であるから

$$f'(x)>0$$

であり，$f(x)$ はつねに増加する．　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}-r\sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

であり，$f'(x)$ の符号は $2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}-r\sin 2x$ の符号と一致するから

条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する

$\Longleftrightarrow 0<r<c$ のときはつねに $f'(x)\geqq 0$ である

$\Longleftrightarrow 0<r<c$ のときはつねに $2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}-r\sin 2x\geqq 0$ $\cdots\cdots$ $(*)$ である

$(*)$ を満たす r の値の範囲を求める．

$$\begin{aligned}
(*)\ &\Longleftrightarrow 2\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq r\sin 2x\\
&\Longleftrightarrow 2\left(\frac{3-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq r\sin 2x
\end{aligned}$$

左辺はつねに正であるから，$\sin 2x \leqq 0$ のときこの不等式はつねに成り立つ．$\sin 2x > 0$ のときについて調べる．

$$\begin{aligned}(*) &\iff r \leqq \frac{(3-\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\sin 2x} \\ &\iff r^2 \leqq \frac{(3-\cos 2x)^3}{2\sin^2 2x} \quad (\because\ \text{辺々の値は正})\end{aligned}$$

$t = \cos 2x$ とおくと

$$\frac{(3-\cos 2x)^3}{2\sin^2 2x} = \frac{(3-\cos 2x)^3}{2(1-\cos^2 2x)} = \frac{(3-t)^3}{2(1-t^2)}$$

である．$g(t) = \dfrac{(3-t)^3}{2(1-t^2)}$ $(-1 < t < 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(3-t)^2(-1)\cdot(1-t^2)-(3-t)^3\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{(3-t)^2\{3(t^2-1)+2t(3-t)\}}{2(1-t^2)^2} \\ &= \frac{(3-t)^2(t^2+6t-3)}{2(1-t^2)^2}\end{aligned}$$

$-1 < t < 1$ における $g(t)$ の増減は下表となる．

t	(-1)	$\cdots$	$-3+2\sqrt{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{aligned}g(-3+2\sqrt{3}) &= \frac{(6-2\sqrt{3})^3}{2\left\{1-(-3+2\sqrt{3})^2\right\}} \\ &= \frac{(2\sqrt{3})^3(\sqrt{3}-1)^3}{2\{1-(21-12\sqrt{3})\}} \\ &= \frac{24\sqrt{3}(3\sqrt{3}-3\cdot 3+3\sqrt{3}-1)}{2(-20+12\sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{3}(6\sqrt{3}-10)}{3\sqrt{3}-5} \\ &= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

$0 < r < c$ のときはつねに不等式 $(*)$ が成り立つための条件は

$$r^2 \leqq 6\sqrt{3}$$

が成り立つことであり，$r > 0$ より

$$r \leqq \sqrt{6\sqrt{3}}$$

である．よって，条件を満たす最大の正の実数 c は

$$\boldsymbol{c = \sqrt{6\sqrt{3}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

【3 – 1】 $$f(x) = \frac{16 - x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}}$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x)\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16} - (16 - x^2)\cdot\dfrac{4x^3 - 4x}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}}}{x^4 - 2x^2 + 16} \\ &= \frac{-2x(x^4 - 2x^2 + 16) + 2x(x^2 - 16)(x^2 - 1)}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2x\{-(x^4 - 2x^2 + 16) + (x^4 - 17x^2 + 16)\}}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-30x^3}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

であり，$f'(x) = 0$ を満たす実数 x のすべては

$$\boldsymbol{x = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $f'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= -30\frac{3x^2\cdot(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{3}{2}} - x^3\cdot\dfrac{3}{2}(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{1}{2}}(4x^3 - 4x)}{(x^4 - 2x^2 + 16)^3} \\ &= -30\frac{3x^2(x^4 - 2x^2 + 16) - 3x^3(2x^3 - 2x)}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -30\frac{3x^2\{(x^4 - 2x^2 + 16) - (2x^4 - 2x^2)\}}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 90\frac{x^2(x^4 - 16)}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 90\frac{x^2(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)}{(x^4 - 2x^2 + 16)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

であり，$f''(x) = 0$ を満たす実数 x のすべては

$$\boldsymbol{x = 0,\ \pm 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $f(x)$ は偶関数であり，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

　$x \geqq 0$ での $f(x)$ の増減，凹凸は右表となる．さらに

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↘

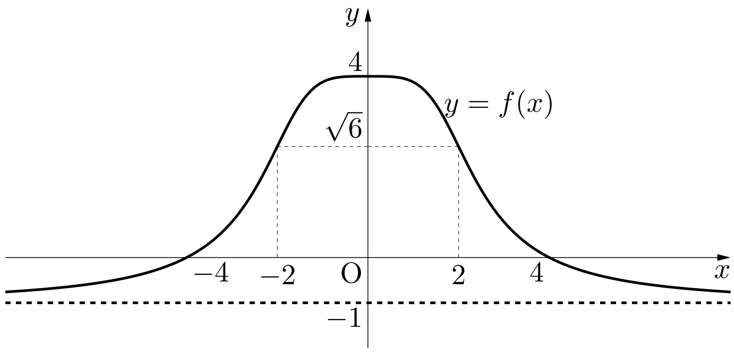
$$f(0)=\frac{16}{\sqrt{16}}=4$$

$$f(2)=\frac{12}{\sqrt{16-8+16}}=\frac{12}{2\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{16}{x^2}-1}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{16}{x^4}}}=-1$$

である．対称性も考えると，$y=f(x)$ の変曲点は　$\left(\pm 2,\ \sqrt{6}\right)$　である．

ならびに漸近線は　$y=-1$　であり，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図となる．



(4) $y=f(x)$ のグラフの対称性より $x \geqq 0$ の範囲で調べればよい．

$y=f(x)$ $(x \geqq 0)$ 上の点 $(s,\ f(s))$ における接線の方程式は

$$y=f'(s)(x-s)+f(s)$$

であるから，点 $(0,\ t)$ から曲線 $y=f(x)$ に接線が引けるための条件は

$t=f'(s)(0-s)+f(s)$ を満たす実数 s $(\geqq 0)$ が存在する

ことである．

$$g(s)=-sf'(s)+f(s)$$

とおき，s が $s \geqq 0$ の範囲を動くときの $g(s)$ の動く範囲を求める．

$$\begin{aligned} g'(s)&=-f'(s)-sf''(s)+f'(s)\\ &=-sf''(s)\\ &=-90\frac{s^3(s+2)(s-2)(s^2+4)}{(s^4-2s^2+16)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

であり，$s \geqq 0$ における $g(s)$ の増減は右表となる．

s	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(s)$		$+$	0	$-$
$g(s)$		↗		↘

$$g(0) = -0 + f(0) = 4$$

$$\begin{aligned} g(2) &= -2f'(2) + f(2) = -2 \cdot \frac{-30 \cdot 8}{(16-8+16)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{6} \\ &= \frac{2 \cdot 30 \cdot 8}{24 \cdot 2\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{10}{\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \to \infty} g(s) &= \lim_{s \to \infty} \left\{ -s \cdot \frac{-30s^3}{(s^4 - 2s^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} + f(s) \right\} \\ &= \lim_{s \to \infty} \left\{ \frac{30}{\left(s^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{s^{\frac{2}{3}}} + \frac{16}{s^{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}} + f(s) \right\} \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから

$$-1 < g(s) \leqq \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

である．よって，求める t の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < t \leqq \frac{8\sqrt{6}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$\boxed{4}$

(1) $f(x) = x^4$ のとき，x の関数 $tx - f(x) = tx - x^4$ であり，これを x で微分すると

$$(tx - x^4)' = t - 4x^3$$

である．$(tx - x^4)'$ は単調減少であり，$(tx - x^4)'$ の符号は $x = \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で正から負にかわるから，$tx - x^4$ は任意の実数 t に対して $x = \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極大かつ最大となる．

$tx - f(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$$g(t) = t\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3t}{4}\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{3\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) x の関数 $tx - f(x)$ を x で微分すると

$$(tx - f(x))' = t - f'(x)$$

である．条件 (i)，(ii) より

連続な導関数 $f'(x)$ は単調増加であり $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f'(x) = \infty$ $\cdots\cdots$ $(*)$

であるから

$t-f'(x)$ は連続で単調減少であり $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{t-f'(x)\}=\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{t-f'(x)\}=-\infty$

である．したがって，$t-f'(x)=0$ となる x がただ一つ存在する．この x を $\alpha(t)$ とおくと，$x=\alpha(t)$ で $t-f'(x)$ の符号は正から負にかわり，$tx-f(x)$ は $x=\alpha(t)$ で極大かつ最大となる．すなわち，任意の実数 t に対して x の関数 $tx-f(x)$ は最大値 $g(t)$ $(=t\alpha(t)-f(\alpha(t)))$ を持つ． ……(証明終わり)

(3) 任意の実数 t に対して，(2) と同じく $t-f'(x)=0$ を満たす値 x を $\alpha(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} st-g(t) &= st-(t\alpha(t)-f(\alpha(t))) \\ &= \{s-\alpha(t)\}t+f(\alpha(t)) \\ &= \{s-\alpha(t)\}f'(\alpha(t))+f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

である．

(i) $s-\alpha(t)=0$ のとき

$$st-g(t)=0\cdot f'(s)+f(s)=f(s)$$

である．

(ii) $s-\alpha(t)\neq 0$ のとき

平均値の定理より

$$\frac{f(s)-f(\alpha(t))}{s-\alpha(t)}=f'(c)$$

を満たす実数 c (c は s と$\alpha(t)$ の間の値) が存在する．

$$\begin{aligned} & f(s)-f(\alpha(t))=f'(c)(s-\alpha(t)) \\ \therefore\quad & f(\alpha(t))=f(s)-f'(c)(s-\alpha(t)) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} st-g(t) &= (s-\alpha(t))f'(\alpha(t))+f(s)-f'(c)(s-\alpha(t)) \\ &= (s-\alpha(t))\{f'(\alpha(t))-f'(c)\}+f(s) \end{aligned}$$

$f'(x)$ は増加関数であるから

$s<\alpha(t)$ のとき，$s<c<\alpha(t)$ であるから，$f'(c)<f'(\alpha(t))$

$s>\alpha(t)$ のとき，$s>c>\alpha(t)$ であるから，$f'(c)>f'(\alpha(t))$

であり，いずれのときも $s-\alpha(t)$ と $f'(\alpha(t))-f'(c)$ は異符号であり

$$\begin{aligned} & (s-\alpha(t))\{f'(\alpha(t))-f'(c)\}<0 \\ \therefore\quad & st-g(t)<f(s) \end{aligned}$$

である．

以上 (i)(ii) より，$st-g(t)$ は $s=\alpha(t)$ となる t において最大値 $f(s)$ をとる．

……(証明終わり)

【4 − 1】

$$f'(0)=0,\ f''(x)>0,\ f'''(x)<0$$

$$F=\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx \quad (0<a<b)$$

(1)
$$g(t)=\frac{f(t)+f(a)}{2}(t-a)-\int_a^t f(x)\,dx \quad (a \leqq t)$$

とおく．$a<t$ において

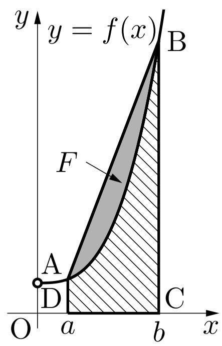
$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f'(t)}{2}(t-a)+\frac{f(t)+f(a)}{2}\cdot 1-f(t) \\ &= \frac{f'(t)}{2}(t-a)-\frac{f(t)-f(a)}{2} \\ g''(t) &= \frac{f''(t)}{2}(t-a)+\frac{f'(t)}{2}\cdot 1-\frac{f'(t)}{2} \\ &= \frac{f''(t)}{2}(t-a) \\ &> 0 \quad (\because\ f''(t)>0,\ a<t) \end{aligned}$$

$g'(t)$ は単調増加である．さらに，$g'(a)=0$ であるから，$a<t$ において $g'(t)>0$ である．

したがって，$g(t)$ は単調増加である．さらに，$g(a)=0$ であるから，$a<t$ において $g(t)>0$ である．

よって，$0<a<b$ のとき $g(b)>0$，すなわち $F>0$ である．　　……(証明終わり)

- $x>0$ において，$f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．さらに，$f'(x)$ は単調増加であり，かつ $f'(0)=0$ であるから，$x>0$ においては $f'(x)>0$，すなわち $f(x)$ は単調増加である．よって，$y=f(x)$ $(x>0)$ のグラフは右図となる．$0<a<b$ のとき



$$\begin{aligned} F &= \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx \\ &= (\text{台形 ABCD の面積})-(\text{斜線部分の面積}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

である．

(2)
$$h(t)=\frac{1}{2}\left\{f(a)-2f\left(\frac{a+t}{2}\right)+f(t)\right\}(t-a)-g(t) \quad (a \leqq t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)+f(a)}{2}(t-a)-f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a)-g(t) \\ &= \int_a^t f(x)\,dx-f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a) \end{aligned}$$

である．

$$h'(t) = f(t) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot(t-a) - f\left(\frac{t+a}{2}\right)\cdot 1$$
$$= f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{t-a}{2}$$

である．平均値の定理より

$$\frac{f(t) - f\left(\dfrac{t+a}{2}\right)}{t - \dfrac{t+a}{2}} = f'(c)$$

$$\therefore\quad f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) = f'(c)\frac{t-a}{2}$$

となる c $\left(\dfrac{t+a}{2} < c < t\right)$ が存在するから

$$h'(t) = f'(c)\frac{t-a}{2} - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\frac{t-a}{2}$$
$$= \left\{f'(c) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right)\right\}\frac{t-a}{2}$$
$$> 0 \quad \left(\because\ f''(x) > 0 \text{ より } f'(x) \text{ は単調増加かつ} \frac{t+a}{2} < c,\ a < t\right)$$

であり，$h(t)$ は単調増加である．さらに，$h(a) = 0$ であるから

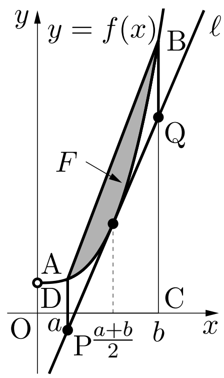
$$h(t) > 0\ (a < t)$$

が成り立つ．

よって $0 < a < b$ のとき $h(b) > 0$，すなわち

$$F < \frac{1}{2}\left\{f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}(b-a)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)



- $y = f(x)$ 上の点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

であり，ℓ と直線 AD，BC との交点をそれぞれ P，Q とおくと

$$\mathrm{AP} = f(a) - \left\{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$
$$= f(a) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\mathrm{BQ} = f(b) - \left\{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$
$$= f(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

台形 APQB の面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{AP} + \mathrm{BQ})(b-a) = \frac{1}{2}\left\{f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}(b-a)$$

である．F は台形 APQB に含まれる図形の面積であり

$$F < (\text{台形 APQB の面積})$$

であるから

$$F < \frac{1}{2}\left\{f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}(b-a)$$

である．

(3) 目標の不等式の左辺 $f(a) - 2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)$ は

$$(\text{左辺}) = \left\{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + \left\{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$$

と変形される．平均値の定理より

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = f'(c_1)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = f'(c_1)\frac{b-a}{2}$$
$$f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(c_2)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = f'(c_2)\frac{b-a}{2}$$

となる c_1，c_2 $\left(a < c_1 < \dfrac{a+b}{2} < c_2 < b\right)$ が存在するから

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= -f'(c_1)\frac{b-a}{2} + f'(c_2)\frac{b-a}{2} \\ &= \{f'(c_2) - f'(c_1)\}\frac{b-a}{2} \qquad \cdots\cdots \text{①}\end{aligned}$$

である．

$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調増加であり，$f'(0) = 0$ かつ $0 < a < c_1$ より $f'(c_1) > 0$ である．$f'(c_2) - f'(c_1) > f'(c_2)$ であるから

$$(\text{左辺}) < f'(c_2)\frac{b-a}{2} < f'(b)\frac{b-a}{2} \quad (\because\ b - a > 0,\ c_2 < b)$$

すなわち

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2}f'(b)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(4) (2) と ① より

$$\begin{aligned}F &< \frac{1}{2}\cdot\{f'(c_2) - f'(c_1)\}\frac{b-a}{2}\cdot(b-a) \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}\{f'(c_2) - f'(c_1)\} \quad (0 < a < c_1 < c_2 < b)\end{aligned}$$

平均値の定理より

$$f'(c_2) - f'(c_1) = f''(d)(c_2 - c_1)$$

となる d $(c_1 < d < c_2)$ が存在する．したがって

$$F < \frac{(b-a)^2}{4}f''(d)(c_2 - c_1)$$

である．$f'''(x) < 0$ より $f''(x)$ は単調減少であるから

$$f''(d) < f''(a) \quad (\because\ a < d)$$

$0 < c_2 - c_1 < b - a$ であるから

$$F < \frac{(b-a)^2}{4} \cdot f''(a)(b-a)$$

すなわち

$$F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a)$$

である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)