

千葉大学の微分についての問題

千葉県立長生高等学校

2025 年 12 月 5 日 (金)

目 次

問題の選択に関する注意	1
過去 6 年の出題	2
1 数学 II の微分 ($+\alpha$)	7
2 極限	8
3 数学 III の微分	9
4 平均値の定理	10
5 解答例	11

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学A 数学B 数学C	国際教養学部	人文学科（行動科学コース）	1 2 3
	文学部 法政経学部 教育学部	小学校コース 中学校コース （国語科教育分野， 社会科教育分野， 理科教育分野， 技術科教育分野） 小中専門教科コース 英語教育コース 特別支援教育コース 乳幼児教育コース 園芸学部 食料資源経済学科 先進科学プログラム 化学関連分野 生物学関連分野 植物生命科学関連分野 人間科学関連分野	
数学Ⅰ 数学Ⅱ 数学Ⅲ 数学A 数学B 数学C	教育学部	中学校コース （数学科教育分野）	3 4 5 6 7 8
	理学部	物理学科，化学科 生物学科，地球科学科	4 5 6 7 8
	工学部 情報・データサイエンス学部 園芸学部	園芸学科，応用生命化学科 緑地環境学科	
	薬学部 先進科学プログラム	物理学関連分野，工学関連分野 情報・データサイエンス関連分野	
	理学部	数学・情報数理学科	4 5 6 7 8 9
	医学部		5 6 7 8 9

過去 6 年の出題

25 年

- 1 (1) 数 II (対数) 桁数と最高位の数字
- (2) 数 II (微分) 3 次方程式が虚数解をもつ
- 2 数 A (確率) さいころ投げでの目の総和の確率
- 3 数 C (平面ベクトル) 内積の計算と軌跡
- 4 数 B (数列) 数学的帰納法と分数漸化式
- 5 数 A (確率) 3 方向に進むランダムウォーク
- 6 数 III (積分) 接する 2 曲線と面積
- 7 数 III (微分) グラフの概形と曲線外の点からの接線
- 8 数 C (複素数平面) 凸四角形の各辺に接する正方形の中心について
- 9 数 III (微分) 平均値の定理

24 年

- 1 数 II (対数) 三角形の存在条件と対数不等式
- 2 数 A (確率) 3 色の球による非復元事象の確率
- 3 数 I (2 次関数) 絶対値付き 2 次関数のグラフ
- 4 (1) 数 III (積分) 三角関数の部分積分
- (2) 数 C (複素数平面) 正三角形をつくる
- (3) 数 A (場合の数) 二項係数
- 5 数 A, 数 III (確率, 極限) 2 本の線分上の 3 点を結ぶ図形の面積と極限
- 6 数 III (積分) 回転体の体積
- 7 数 II・数 III (微分) 3 次方程式の解と極限
- 8 数 III (極限) 3 つの円の内接・外接と極限
- 9 数 III (極限) 二項係数を係数にもつ多項式と極限

23 年

- 1 数 II (図形と方程式) 直線の方程式と点の軌跡
- 2 数 A (確率) さいころ投げによる得点の確率
- 3 (1) 数 I (2 次関数) 絶対値付き 2 次関数のグラフと直線の共有点の個数
(2) 数 II (積分) 定積分で表された関数
- 4 数 III (微分) 指数関数の最大値の極限とそのときの x の極限 (e の定義)
- 5 数 B (平面ベクトル) 三角形の外心
- 6 数 A (確率) 数直線上の動点と確率
- 7 数 III (積分) 絶対値付き関数の定積分と最大値
- 8 数 III (複素数平面) $z^n = i$ を満たす複素数 z の実部, 虚部
- 9 数 III (微分) $tx - f(x)$ の最大値

22 年

- 1 数 A (確率) 円周上の 12 個の点を移動する点についての確率
- 2 数 I (三角比) 三角形内の二等辺三角形
- 3 数 II (面積) 絶対値付き 2 次関数のグラフと面積
- 4 数 A (整数) 4 桁の数字の入れ換えについての証明問題
- 5 数 A (確率) n 個のサイコロの出た目の積 M についての確率
- 6 数 B (空間ベクトル) 空間内の直線と xy 平面上の放物線
- 7 数 A 数 B (整数, 数列) 2 次の不定方程式と 3 項間漸化式
- 8 数 III (積分) 定積分と不等式, 極限
- 9 数 III (微分) 関数がつねに増加する

21 年

- 1 数 II (2 次関数) 円, 円環の面積と最大値
- 2 数 B (数列) 直線と円に外接する円の列
- 3 数 A (確率) 球とさいころによる得点についての確率
- 4 数 B (数列) 領域において条件を満たす点の個数
- 5 数 A (確率) 球とさいころによる得点についての確率
- 6 数 II (図形と方程式, 微分) 軌跡, 方程式への応用
- 7 数 III (複素数) 複素数の極形式
- 8 数 III (積分) 指数関数, 対数関数のグラフと面積および極限
- 9 数 III (微分) 多項式の列と数学的帰納法

20 年

- 1 数 A (確率) カードによる確率
- 2 数 II (微分) 3 次関数のグラフと接線
- 3 数 B (数列) 相似な四角形の列
- 4 数 III (積分) 回転体の体積と最大値
- 5 数 B (空間ベクトル) 四面体
- 6 数 A (確率) カードに書かれた数の和と条件付き確率
- 7 数 II (微分) 2 つの曲線に接する 3 本の直線
- 8 数 III (複素数平面) 相似な三角形の列
- 9 数 B 数 III (数列, 数列の極限) 二項係数の和と極限
- 10 数 A (整数) 複素数の実部, 虚部が整数であることの証明
- 11 数 III (積分) 定積分と不等式, 関数列の極限

		2025	2024	2023	2022	2021	2020
数学 I	数と式						
数学 I	集合と命題						
数学 I	2 次関数		3	3 (1)		1	
数学 I	図形と計量				2		
数学 I	データの分析						
数学 A	場合の数		4 (3)				
数学 A	確率	2, 5	2	2, 6	1, 5	3, 5	1, 6
数学 A	整数の性質				4		10
数学 A	図形の性質						
数学 II	式の証明						
数学 II	複素数と方程式						
数学 II	図形と方程式			1			
数学 II	三角関数						
数学 II	指数・対数	1 (1)	1				
数学 II	微分	1 (2)				6	2, 7
数学 II	積分			3 (2)	3		
数学 B	数列	4			7	2, 4	3
数学 B	統計的な推測						
数学 III	関数						
数学 III	数列の極限		5, 9				9
数学 III	関数の極限		7, 8				
数学 III	微分法	7, 9		4, 9	9	9	
数学 III	積分法	6	4 (1), 6	7	8	8	4, 11
数学 C	ベクトル	3		5	6		5
数学 C	複素数平面	8	4 (2)	8		7	8
数学 C	式と曲線						

文系数学

文系学部 1, 2, 3 (80 分)

- 確率は必ず出題される．ついで，2 次関数，数学 II の微分積分もよく出題される．
- データの分析，統計的な推測からは出題されていない．

理系数学

教育学部 (中学校) 3～8 (150 分)

理系学部 4～8 (120 分)

理学部 (数学・情報数理) 4～9 (180 分)

医学部 5～9 (120 分)

- 2024 年での出題はないが確率は頻出問題。同じく数学 III の微分積分，複素数平面，ベクトルも頻出分野である。
- データの分析，統計的な推測からは出題されていない。
- 難問もあるが，入試の典型問題も多く出題される。まずは典型問題を標準入試問題集などを終了させ，千葉大ならではの難問は類題を探すのではなく，その問題を研究し尽くすことを薦める。

1 数学IIの微分(+ α)

1 n を正の整数とする. x の関数

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n - 3)x + 1$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) α を $f(x) = 0$ の1つの解とする. $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる3つの実数解をもつことを示せ.
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で2番目に大きいものを β_n とする. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ.

(24 千葉大 7)

参考問題

【1-1】 a を実数とする. 方程式

$$x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

が虚数解を持つ a の範囲を求めよ.

(25 千葉大 1(2))

【1-2】 k を定数とし, $f(x) = x^3 - kx$ とおく. 曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる. 点 P を通り曲線 C とちょうど2点を共有する2つの直線のうち, 傾きが大きい方を ℓ_1 , 小さい方を ℓ_2 とする. さらに, C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 , C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする. ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と, Q_1 および Q_2 の座標を求めよ.

(20 千葉大 2)

【1-3】 a は0でない定数とする. 2つの放物線 $y = x^2$ と $x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど3本となるような a の範囲を求めよ.

(20 千葉大 7)

2 極限

2 2つの実数 a, b は $0 < b < a$ を満たすとする. 関数

$$f(x) = \frac{1}{b}(e^{-(a-b)x} - e^{-ax})$$

の最大値を $M(a, b)$, 最大値をとるときの x の値を $X(a, b)$ と表す. ここで, e は自然対数の底である.

- (1) $X(a, b)$ を求めよ.
- (2) 極限 $\lim_{b \rightarrow +0} X(a, b)$ を求めよ.
- (3) 極限 $\lim_{b \rightarrow +0} M(a, b)$ を求めよ.

(23 千葉大 4)

参考問題

【2-1】半径1, 中心 O の円 C がある. 2つの円 C_1 と C_2 が次の2つの条件を満たすとする.

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する.
- C_1 と C_2 は互いに外接する.

円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ D, E とし, 半径をそれぞれ p, q とする. $\theta = \angle DOE$ とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) q を p と θ を用いて表せ.
- (2) p を固定する. θ が0に近づくとき, $\frac{q}{\theta^2}$ の極限値を求めよ.

さらに, 円 C_3 が次の2つの条件を満たすとする.

- C_3 と C_1 は半径が等しい.
- C_3 は C に内接し, C_1, C_2 のどちらとも外接する.

このとき以下の問いに答えよ.

- (3) $p = \sqrt{2} - 1$ のとき, q の値を求めよ.
- (4) θ が0に近づくとき, $\frac{q}{p}$ の極限値を求めよ.

(24 千葉大 8)

3 数学IIIの微分

3 r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

を考える．

(1) $r = 1$ のとき， $f(x)$ はつねに増加することを示せ．

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ．

条件： $0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する．

(22 千葉大 9)

参考問題

【3－1】すべての実数 x に対して定義された関数

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 16}}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(2) $f''(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(3) $y = f(x)$ の凹凸，変曲点，ならびに漸近線を調べて，そのグラフの概形を描け．

(4) 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線が引けるような実数 t の範囲を求めよ．

(25 千葉大 7)

4 平均値の定理

4 関数 $f(x)$ と実数 t に対し, x の関数 $tx - f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く.

(1) $f(x) = x^4$ のとき, 任意の実数 t について $g(t)$ が存在する. この $g(t)$ を求めよ.

以下, 関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち, 次の 2 つの条件 (i), (ii) が成り立つものとする.

(i) $f'(x)$ は増加関数, すなわち $a < b$ ならば $f'(a) < f'(b)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$

(2) 任意の実数 t に対して, x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ.

(3) s を実数とする. t が実数全体を動くとき, t の関数 $st - g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ.

(23 千葉大 9)

参考問題

【4-1】関数 $f(x)$ は 3 次導関数 $f'''(x)$ を持ち, $f'(0) = 0$ であり, すべての実数 x に対して $f''(x) > 0$, $f'''(x) < 0$ を満たすものとする. また, $0 < a < b$ とし,

$$F = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b-a) - \int_a^b f(x) dx$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $F > 0$ を示せ.

(2) $F < \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a)$ を示せ.

(3) $f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2} f'(b)$ を示せ.

(4) $F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a)$ を示せ.

(25 千葉大 9)

5 解答例

1 $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n - 3)x + 1$

(1) α は $f(x) = 0$ の解の 1 つであるから

$$f(\alpha) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である. このとき

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 - 2n\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + (2n-3)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + 1 \\ &= \frac{1 - 2n(1-\alpha) + (2n-3)(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^3}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{1 - 2n(1-\alpha) + (2n-3)(1-2\alpha+\alpha^2) + (1-3\alpha+3\alpha^2-\alpha^3)}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{-1 - (2n-3)\alpha + 2n\alpha^2 - \alpha^3}{(1-\alpha)^3} \\ &= \frac{-f(\alpha)}{(1-\alpha)^3} \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

(2) $x = 0, 1$ を代入すると, n に関係ない関数値 $f(x)$ が得られる.

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = 1 - 2n + (2n - 3) + 1 = -1 < 0$$

であり, 区間 $0 < x < 1$ に少なくとも 1 つ $f(x) = 0$ となる x が存在する.

さらに, $x \neq 0$ のとき $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2n}{x} + \frac{2n-3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ と変形すると

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ であり, 区間 $x < 0$ に少なくとも 1 つ $f(x) = 0$ となる x が存在する.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり, 区間 $1 < x$ に少なくとも 1 つ $f(x) = 0$ となる x が存在する.

3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は高々 3 個であるから, $f(x) = 0$ は 3 つの区間

$$x < 0, 0 < x < 1, 1 < x$$

にそれぞれ解を 1 つずつもつ, すなわち, 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ. (証明終わり)

(3) $f(x) = 0$ の異なる 3 つの解を $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ ($\alpha_n < 0 < \beta_n < 1 < \gamma_n$) とおくと, β_n は 2 番目に大きい解である.

(1) より, $\frac{1}{1-\alpha_n}, \frac{1}{1-\beta_n}, \frac{1}{1-\gamma_n}$ も $f(x) = 0$ の異なる 3 つの解であり

$$-\alpha_n > 0 > -\beta_n > -1 > -\gamma_n$$

$$1-\alpha_n > 1 > 1-\beta_n > 0 > 1-\gamma_n$$

$$\therefore \frac{1}{1-\gamma_n} < 0 < \frac{1}{1-\alpha_n} < \frac{1}{1-\beta_n}$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{1}{1-\gamma_n}, \quad \beta_n = \frac{1}{1-\alpha_n}, \quad \gamma_n = \frac{1}{1-\beta_n}$$

であり

$$\beta_n = \frac{1}{1-\alpha_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\gamma_n}} = \frac{1-\gamma_n}{-\gamma_n} = 1 - \frac{1}{\gamma_n}$$

である. ここで

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 - 2n^3 + (2n-3)n + 1 \\ &= -n^3 + 2n^2 - 3n + 1 \\ &= -n^2(n-2) - 3n + 1 \\ &< 0 \quad (\because n \text{ は正の整数}) \end{aligned}$$

(2) より

$$1 \leq n < \gamma_n \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \infty$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\gamma_n}\right) = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

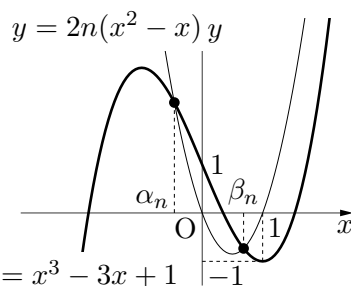
- (1) を無視して $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ ($0 < \beta_n < 1$) を考える.
 $f(x) = 0 \xLeftrightarrow{n \rightarrow \infty} x^3 - 3x + 1 = 2n(x^2 - x)$

であり, $f(x) = 0$ の解は 2 曲線 $y = x^3 - 3x + 1$,
 $y = 2n(x^2 - x)$ の共有点の x 座標である.

$$y = 2n(x^2 - x) = 2n \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{n}{2}$$

であり, $n \rightarrow \infty$ のとき, $y = 2n(x^2 - x)$ の頂点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}\right)$ は下方に移動し, 区間 $0 < x < 1$ の範囲にある共有点の x 座標 β_n は 1 に近づく と推定される.

この推定が成り立つことを証明する.



$$\begin{aligned}
f\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 - 2n\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + (2n-3) \cdot \frac{n-1}{n} + 1 \\
&= \frac{(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 2n^2(n^2 - 2n + 1) + n^2(2n^2 - 5n + 3) + n^3}{n^3} \\
&= \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 1}{n^3} \\
&= \frac{n^2(n-2) + 3n - 1}{n^3} \\
&> 0 \quad (\because n \text{ は正の整数})
\end{aligned}$$

であり, $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ と (2) より, $f(x) = 0$ の 2 番目に大きい解 β_n について

$$1 - \frac{1}{n} < \beta_n < 1 \quad \text{が成り立ち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

である. はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$$

である.

$$[1-1] \quad f(x) = x^3 - 3ax + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とおく. a は実数であるから, 実数係数の 3 次方程式 $f(x) = 0$ が虚数解をもつとき, その共役複素数も解であるから

「 $f(x) = 0$ が虚数解を持つ」

ということは

「 $f(x) = 0$ が 1 つの実数解と互いに共役な複素数解をもつ」

ということであり

「 $f(x) = 0$ の実数解はただ 1 つである」 …… (*)

ということである. $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点について調べる.

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$$

(i) $a < 0$ のとき, すべての x に対し $f'(x) > 0$ であり, $f(x)$ は単調増加である.

$y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点は 1 個であり, (*) を満たす.

(ii) $a = 0$ のとき, $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(x + 2^{-\frac{1}{6}}\right)\left(x^2 - 2^{-\frac{1}{6}}x + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$ であり

$$x^2 - 2^{-\frac{1}{6}}x + 2^{-\frac{1}{3}} = \left(x - \frac{2^{-\frac{1}{6}}}{2}\right)^2 - \frac{2^{-\frac{1}{3}}}{4} + 2^{-\frac{1}{3}} = \left(x - \frac{2^{-\frac{1}{6}}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} > 0$$

であるから, $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 $x = -2^{-\frac{1}{6}}$ をもつ.

(iii) $a > 0$ のとき, $f(x)$ は $x = \pm\sqrt{a}$ で極値をとるから

$$(*) \iff (\text{極大値})(\text{極小値}) > 0 \quad \dots\dots ①$$

である.

$$\begin{aligned}
 (\text{極大値})(\text{極小値}) &= f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) \\
 &= \left(-a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - 4a^3 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - 2a)(1 + 2a + 4a^2)
 \end{aligned}$$

$1 + 2a + 4a^2 = 4\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ であり, ① であるための a の条件は

$$1 - 2a > 0 \quad \therefore \quad a < \frac{1}{2}$$

であり, $a > 0$ とあわせて

$$0 < a < \frac{1}{2}$$

である.

(i), (ii), (iii) をまとめると, 求める a の範囲は

$$a < \frac{1}{2} \quad \text{.....(答)}$$

である.

$$\bullet \quad f(x) = 0 \iff x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 3ax$$

曲線 $y = x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ と直線 $y = 3ax$ の共有点について調べる.

$$y' = 3x^2$$

であり, $y = x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ 上の点 $\left(t, t^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接線の方程式は

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{..... ㉞}$$

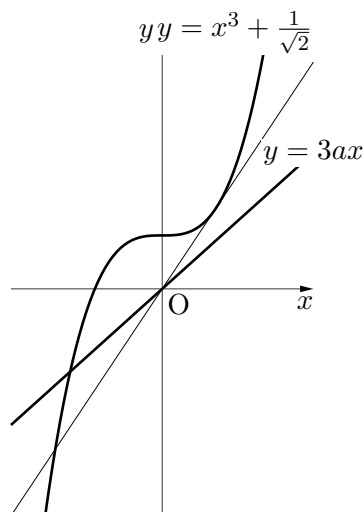
である. $y = 3ax$ は a の値にかかわらず原点を通る直線であり, ㉞ が原点を通るのは

$$0 = -2t^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore t^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \therefore t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときである. このとき ㉞ は

$$y = \frac{3}{2}x$$



であり, 求める a の範囲は

$$3a < \frac{3}{2} \quad \therefore \quad a < \frac{1}{2}$$

である.

[1-2] $C: y = f(x) = x^3 - kx$

$$f'(x) = 3x^2 - k$$

C 上の点 $(t, t^3 - kt)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - k)(x - t) + t^3 - kt$$

$$\therefore y = (3t^2 - k)x - 2t^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である. これが C 上の原点と異なる点 $P(a, f(a))$ を通るから

$$a^3 - ka = (3t^2 - k)a - 2t^3$$

$$2t^3 - 3at^2 + a^3 = 0$$

$$(t - a)^2(2t + a) = 0$$

$$\therefore t = a, \quad -\frac{a}{2}$$

である. 2つの接線の傾き $f'(a), f'(-\frac{a}{2})$ は

$$f'(a) = 3a^2 - k$$

$$f'(-\frac{a}{2}) = \frac{3}{4}a^2 - k$$

$$\therefore f'(-\frac{a}{2}) < f'(a)$$

である. よって ℓ_1, ℓ_2 の方程式は

$$\ell_1: y = (3a^2 - k)x - 2a^3 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\ell_2: y = \left(\frac{3}{4}a^2 - k\right)x + \frac{a^3}{4} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

また, C と接線 $\textcircled{1}$ の共有点の x 座標は

$$x^3 - kx = (3t^2 - k)x - 2t^3$$

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$

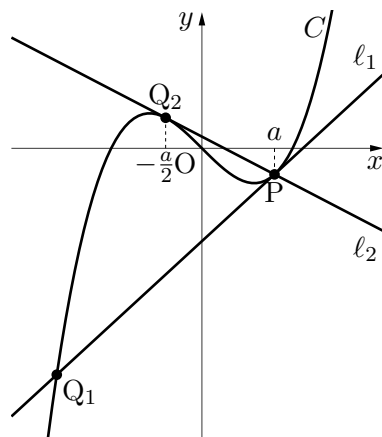
$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$

$$\therefore x = t, \quad -2t$$

であり, Q_1, Q_2 は P でない方 ($x = a$ でない方) の共有点である.

$t = a$ のとき, 共有点の x 座標は $x = a, -2a$ であり, Q_1 の x 座標は $-2a$ であるから

$$Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



である.

$t = -\frac{a}{2}$ のとき, 共有点の x 座標は $x = -\frac{a}{2}$, a であり, Q_2 の x 座標は $-\frac{a}{2}$ であるから

$$Q_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{k}{2}a\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

$$y = x^2 \quad \dots\dots ①$$

$$[1-3] \quad x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4} \quad \dots\dots ②$$

$(x^2)' = 2x$ より, 放物線 ① 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 \\ \therefore y &= 2tx - t^2 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

である. 直線 ③ が放物線 ② と接する条件は

$$\begin{aligned} y &= 2t\left(\frac{1}{2a}y^2 + \frac{3a}{4}\right) - t^2 \\ \frac{t}{a}y^2 - y + \frac{3}{2}at - t^2 &= 0 \end{aligned}$$

が重解をもつことであり, $a \neq 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{t}{a} \neq 0 \\ (-1)^2 - 4 \cdot \frac{t}{a} \cdot \left(\frac{3}{2}at - t^2\right) = 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} t \neq 0 \\ a - 6at^2 + 4t^3 = 0 \end{cases} \\ \iff &a - 6at^2 + 4t^3 = 0 \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

である. ④ を満たす直線 ③ がちょうど 3 本となる条件は

$$④ \text{ を満たす実数 } t \text{ が } 3 \text{ つ存在する} \quad \dots\dots (*)$$

ことである. $f(t) = 4t^3 - 6at^2 + a$ とおく.

$$f'(t) = 12t^2 - 12at = 12t(t-a)$$

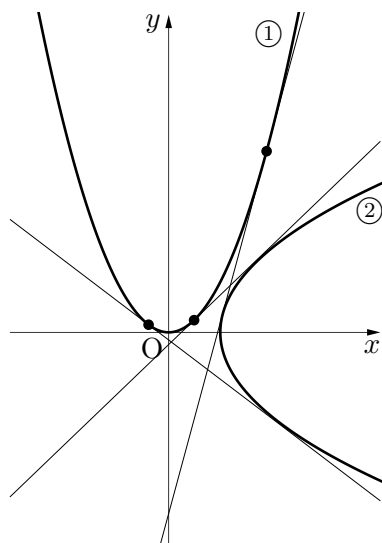
であり

$$\begin{aligned} (*) &\iff (\text{極大値})(\text{極小値}) < 0 \\ &\iff f(0)f(a) < 0 \\ &\iff a(-2a^3 + a) < 0 \end{aligned}$$

であるから, 求める a の範囲は

$$a^2(2a^2 - 1) > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} < a \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.



2

$$f(x) = \frac{1}{b}(e^{-(a-b)x} - e^{-ax}) \quad (0 < b < a)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{b}\{-(a-b)e^{-(a-b)x} + ae^{-ax}\} \\ &= \frac{e^{-ax}}{b}\{a - (a-b)e^{bx}\} \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号は $a - (a-b)e^{bx}$ の符号と一致する. 符号の変わり目は

$$e^{bx} = \frac{a}{a-b} \quad \therefore \quad bx = \log \frac{a}{a-b} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b}$$

であり, $f(x)$ の増減は下表となる.

x	$\cdots$	$\frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

よって, 最大値をとるときの x の値 $X(a, b)$ は

$$X(a, b) = \frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b} \quad \text{.....(答)}$$

である.

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{b \rightarrow +0} X(a, b) &= \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b} = \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{b} \log \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} \\ &= \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{b}\right) \log \left(1 - \frac{b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow +0} \log \left(1 - \frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

e の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ により

$$\lim_{b \rightarrow +0} X(a, b) = \frac{1}{a} \quad \text{.....(答)}$$

である.

$$\bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{b \rightarrow +0} X(a, b) = \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{a} \left(-\frac{a}{b}\right) \log \left(1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow +0} \frac{\log \left(1 - \frac{b}{a}\right)}{-\frac{b}{a}} = \frac{1}{a}$$

としてもよい.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{b \rightarrow +0} X(a, b) &= \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b} = \lim_{b \rightarrow +0} \frac{\log a - \log(a-b)}{b} \\ &= \lim_{b \rightarrow +0} \frac{\log(a-b) - \log a}{-b} \end{aligned}$$

$g(x) = \log x$ とおくと

$$\lim_{b \rightarrow +0} X(a, b) = g'(a) = \frac{1}{a} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(3) $M(a, b)$ は $f(x)$ の最大値であるから

$$\begin{aligned} M(a, b) &= f\left(\frac{1}{b} \log \frac{a}{a-b}\right) = \frac{1}{b} \left\{ e^{-\frac{a-b}{b} \log \frac{a}{a-b}} - e^{-\frac{a}{b} \log \frac{a}{a-b}} \right\} \\ &= \frac{1}{b} \left\{ \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a-b}{b}} - \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}} \right\} \\ &= \frac{1}{b} \left(\frac{a}{a-b} - 1\right) \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}} \end{aligned}$$

e の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ により

$$\lim_{b \rightarrow +0} M(a, b) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{ae} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

• (2) の利用を考えると見通しがよくなる. $X = X(a, b)$ とおくと

$$\begin{aligned} M(a, b) &= f(X) = \frac{1}{b} (e^{-(a-b)X} - e^{-aX}) = \frac{e^{-aX}}{b} (e^{bX} - 1) \\ &= e^{-aX} \cdot \frac{(e^{bX} - 1)}{bX} \cdot X \end{aligned}$$

(2) の結果と e の定義 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ により

$$\lim_{b \rightarrow +0} M(a, b) = e^{-a \cdot \frac{1}{a}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{ae}$$

である.

【2-1】

(1) 3つの円 C (中心 O , 半径 1), C_1 (中心 D , 半径 p),

C_2 (中心 E , 半径 q) は 2つの条件

- C_1 と C_2 はどちらも C に内接する.
- C_1 と C_2 は互いに外接する.

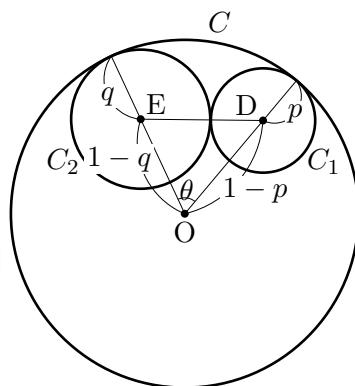
を満たす.

2円が内接する $\iff$ (中心間の距離) = |半径の差|

2円が外接する $\iff$ (中心間の距離) = (半径の和)

であるから

$$OD = 1 - p, \quad OE = 1 - q, \quad DE = p + q$$



を満たす. $\theta = \angle DOE$ であるから, $\triangle ODE$ で余弦定理を用いると

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \theta$$

$$(p+q)^2 = (1-p)^2 + (1-q)^2 - 2(1-p)(1-q) \cos \theta$$

$$2pq = (1-2p) + (1-2q) - 2(1-p) \cos \theta + 2(1-p)q \cos \theta$$

$$\{p+1-(1-p) \cos \theta\}q = 1-p-(1-p) \cos \theta$$

$$\{1+p-(1-p) \cos \theta\}q = (1-p)(1-\cos \theta)$$

C_1 は C に内接するから $p < 1$ であり, $1+p-(1-p) \cos \theta \neq 0$ であるから

$$q = \frac{(1-p)(1-\cos \theta)}{1+p-(1-p) \cos \theta} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

(2) p を固定する. (1) の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{q}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1-p) \sin^2 \theta}{\{1+p-(1-p) \cos \theta\}(1+\cos \theta)\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-p}{\{1+p-(1-p) \cos \theta\}(1+\cos \theta)} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1-p}{\{1+p-(1-p)\} \cdot 2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1-p}{4p} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

である.

(3) さらに, C_3 は次の 2 つの条件

- C_3 と C_1 は半径が等しい.
- C_3 は C に内接し, C_1 , C_2 のどちらとも外接する.

を満たし, $p = \sqrt{2} - 1$ であるから, 円 C_3 の中心を F , 半径を r とおくと

$$r = p = \sqrt{2} - 1$$

$$OF = 1 - r = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

$$DF = p + r = 2r = 2\sqrt{2} - 2$$

$$EF = q + r = q + \sqrt{2} - 1$$

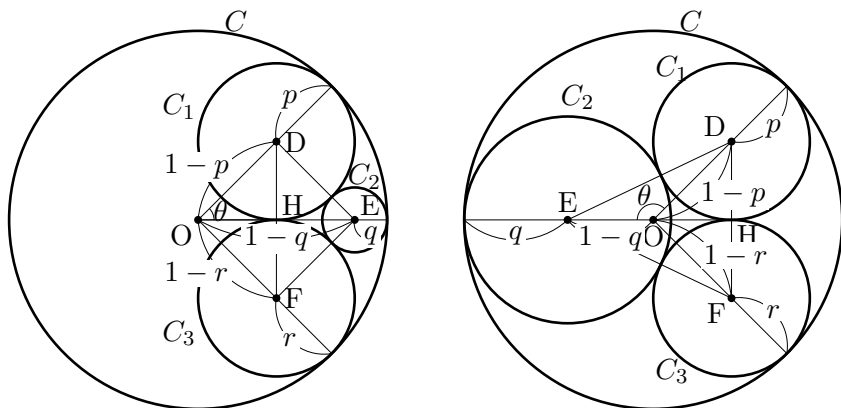
であり

$$OD : OF : DF = (2 - \sqrt{2}) : (2 - \sqrt{2}) : (2\sqrt{2} - 2) = 1 : 1 : \sqrt{2}$$

であるから, $\triangle ODF$ は $\angle DOF = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である. このとき

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{3}{4}\pi$$

である.



$p = \sqrt{2} - 1$ を ① に代入すると

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$q = \frac{(2 - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)^2}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき

$$q = \frac{(2 - \sqrt{2}) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2^2 - 2}{2\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}$$

である. よって, q の値は

$$q = 3 - 2\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2} + 1}{7} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

(4) C_1 と C_3 の接点を H とおくと

$$DH = OD \sin \angle DOH$$

である. $DH = p$, $OD = 1 - p$, また $\angle DOH = \theta$ または $\pi - \theta$ であるから $\sin \angle DOH = \sin \theta$ であり

$$p = (1 - p) \sin \theta \quad \therefore \quad p = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

である. このとき, ① は

$$\begin{aligned} q &= \frac{\left(1 - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} - \left(1 - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{(1 + \sin \theta) + \sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + 2 \sin \theta - \cos \theta} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{q}{p} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + 2 \sin \theta - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta} \right) \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 - \cos \theta + 2 \sin \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta (1 + \sin \theta)}{\{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta (1 + \cos \theta)\} \sin \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta + 2(1 + \cos \theta)} \\
 &= \frac{1}{4} \qquad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

である.

3
$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

(1) $r = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \\
 f'(x) &= 1 - \frac{1}{2}(1 + \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \sin x \cos x \\
 &= \frac{2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - \sin 2x}{2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

であり, すべて x に対して $2 \leq 2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \leq 4\sqrt{2}$, $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ であるから

$$f'(x) > 0$$

であり, $f(x)$ はつねに増加する.

…… (証明終わり)

(2) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r \sin 2x}{2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

であり, $f'(x)$ の符号は $2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r \sin 2x$ の符号と一致するから

条件: $0 < r < c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する

$\iff 0 < r < c$ のときはつねに $f'(x) \geq 0$ である

$\iff 0 < r < c$ のときはつねに $2(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r \sin 2x \geq 0$ …… (*) である

(*) を満たす r の値の範囲を求める.

$$\begin{aligned}
 (*) \iff 2 \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^{\frac{3}{2}} &\geq r \sin 2x \\
 \iff 2 \left(\frac{3 - \cos 2x}{2} \right)^{\frac{3}{2}} &\geq r \sin 2x
 \end{aligned}$$

左辺はつねに正であるから、 $\sin 2x \leq 0$ のときこの不等式はつねに成り立つ。 $\sin 2x > 0$ のときについて調べる。

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff r \leq \frac{(3 - \cos 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \sin 2x} \\
 &\iff r^2 \leq \frac{(3 - \cos 2x)^3}{2 \sin^2 2x} \quad (\because \text{辺々の値は正})
 \end{aligned}$$

$t = \cos 2x$ とおくと

$$\frac{(3 - \cos 2x)^3}{2 \sin^2 2x} = \frac{(3 - \cos 2x)^3}{2(1 - \cos^2 2x)} = \frac{(3 - t)^3}{2(1 - t^2)}$$

である。 $g(t) = \frac{(3 - t)^3}{2(1 - t^2)}$ ($-1 < t < 1$) とおくと

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(3 - t)^2(-1) \cdot (1 - t^2) - (3 - t)^3 \cdot (-2t)}{(1 - t^2)^2} \\
 &= \frac{(3 - t)^2 \{3(t^2 - 1) + 2t(3 - t)\}}{2(1 - t^2)^2} \\
 &= \frac{(3 - t)^2(t^2 + 6t - 3)}{2(1 - t^2)^2}
 \end{aligned}$$

$-1 < t < 1$ における $g(t)$ の増減は下表となる。

t	(-1)	$\cdots$	$-3 + 2\sqrt{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\begin{aligned}
 g(-3 + 2\sqrt{3}) &= \frac{(6 - 2\sqrt{3})^3}{2\{1 - (-3 + 2\sqrt{3})^2\}} \\
 &= \frac{(2\sqrt{3})^3(\sqrt{3} - 1)^3}{2\{1 - (21 - 12\sqrt{3})\}} \\
 &= \frac{24\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} - 1)}{2(-20 + 12\sqrt{3})} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}(6\sqrt{3} - 10)}{3\sqrt{3} - 5} \\
 &= 6\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$0 < r < c$ のときはつねに不等式 $(*)$ が成り立つための条件は

$$r^2 \leq 6\sqrt{3}$$

が成り立つことであり、 $r > 0$ より

$$r \leq \sqrt{6\sqrt{3}}$$

である． よって、条件を満たす最大の正の実数 c は

$$c = \sqrt{6\sqrt{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である．

$$[3-1] \quad f(x) = \frac{16-x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+16}}$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x)\sqrt{x^4-2x^2+16} - (16-x^2) \cdot \frac{4x^3-4x}{2\sqrt{x^4-2x^2+16}}}{x^4-2x^2+16} \\ &= \frac{-2x(x^4-2x^2+16) + 2x(x^2-16)(x^2-1)}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2x\{-(x^4-2x^2+16) + (x^4-17x^2+16)\}}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-30x^3}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

であり、 $f'(x) = 0$ を満たす実数 x のすべては

$$x = 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である．

(2) $f'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= -30 \frac{3x^2 \cdot (x^4-2x^2+16)^{\frac{3}{2}} - x^3 \cdot \frac{3}{2}(x^4-2x^2+16)^{\frac{1}{2}}(4x^3-4x)}{(x^4-2x^2+16)^3} \\ &= -30 \frac{3x^2(x^4-2x^2+16) - 3x^3(2x^3-2x)}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= -30 \frac{3x^2\{(x^4-2x^2+16) - (2x^4-2x^2)\}}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 90 \frac{x^2(x^4-16)}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{5}{2}}} \\ &= 90 \frac{x^2(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x^4-2x^2+16)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

であり、 $f''(x) = 0$ を満たす実数 x のすべては

$$x = 0, \pm 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

である．

(3) $f(x)$ は偶関数であり, $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$x \geq 0$ での $f(x)$ の増減, 凹凸は右表となる. さらに

x	0	...	2	...
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	0	-	0	+
$f(x)$		↘		↘

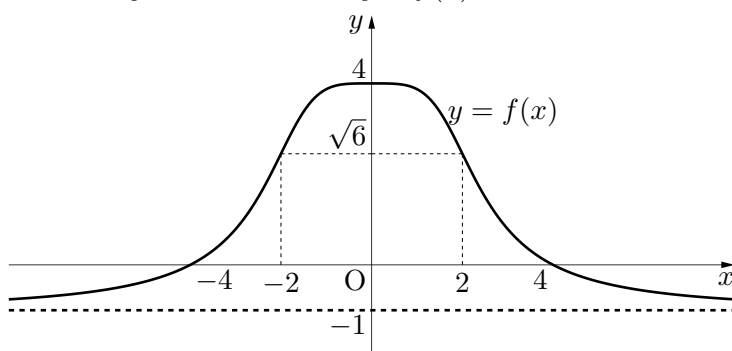
$$f(0) = \frac{16}{\sqrt{16}} = 4$$

$$f(2) = \frac{12}{\sqrt{16-8+16}} = \frac{12}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{16}{x^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{16}{x^4}}} = -1$$

である. 対称性も考えると, $y = f(x)$ の変曲点は $(\pm 2, \sqrt{6})$ である.

ならびに漸近線は $y = -1$ であり, $y = f(x)$ のグラフの概形は下図となる.



(4) $y = f(x)$ のグラフの対称性より $x \geq 0$ の範囲で調べればよい.

$y = f(x)$ ($x \geq 0$) 上の点 $(s, f(s))$ における接線の方程式は

$$y = f'(s)(x - s) + f(s)$$

であるから, 点 $(0, t)$ から曲線 $y = f(x)$ に接線が引けるための条件は

$$t = f'(s)(0 - s) + f(s) \text{ を満たす実数 } s (\geq 0) \text{ が存在する}$$

ことである.

$$g(s) = -sf'(s) + f(s)$$

とおき, s が $s \geq 0$ の範囲を動くときの $g(s)$ の動く範囲を求める.

$$\begin{aligned} g'(s) &= -f'(s) - sf''(s) + f'(s) \\ &= -sf''(s) \\ &= -90 \frac{s^3(s+2)(s-2)(s^2+4)}{(s^4-2s^2+16)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

s	0	...	2	...
$g'(s)$		+	0	-
$g(s)$		↗		↘

であり, $s \geq 0$ における $g(s)$ の増減は右表となる.

$$\begin{aligned}
g(0) &= -0 + f(0) = 4 \\
g(2) &= -2f'(2) + f(2) = -2 \cdot \frac{-30 \cdot 8}{(16 - 8 + 16)^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{6} \\
&= \frac{2 \cdot 30 \cdot 8}{24 \cdot 2\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{10}{\sqrt{6}} + \sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \\
\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ -s \cdot \frac{-30s^3}{(s^4 - 2s^2 + 16)^{\frac{3}{2}}} + f(s) \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{30}{\left(s^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{s^{\frac{2}{3}}} + \frac{16}{s^{\frac{8}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}} + f(s) \right\} \\
&= 0 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

であるから

$$-1 < g(s) \leq \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

である．よって，求める t の範囲は

$$-1 < t \leq \frac{8\sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である．

4

(1) $f(x) = x^4$ のとき， x の関数 $tx - f(x) = tx - x^4$ であり，これを x で微分すると

$$(tx - x^4)' = t - 4x^3$$

である． $(tx - x^4)'$ は単調減少であり， $(tx - x^4)'$ の符号は $x = \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で正から負に

かわるから， $tx - x^4$ は任意の実数 t に対して $x = \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極大かつ最大となる．

$tx - f(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$$g(t) = t \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3t}{4} \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 \left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である．

(2) x の関数 $tx - f(x)$ を x で微分すると

$$(tx - f(x))' = t - f'(x)$$

である．条件 (i)，(ii) より

連続な導関数 $f'(x)$ は単調増加であり $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \cdots$

$\cdots (*)$

であるから

$t - f'(x)$ は連続で単調減少であり $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{t - f'(x)\} = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} \{t - f'(x)\} = -\infty$

である。したがって、 $t - f'(x) = 0$ となる x がただ一つ存在する。この x を $\alpha(t)$ とおくと、 $x = \alpha(t)$ で $t - f'(x)$ の符号は正から負にかわり、 $tx - f(x)$ は $x = \alpha(t)$ で極大かつ最大となる。すなわち、任意の実数 t に対して x の関数 $tx - f(x)$ は最大値 $g(t) (= t\alpha(t) - f(\alpha(t)))$ を持つ。…… (証明終わり)

(3) 任意の実数 t に対して、(2) と同じく $t - f'(x) = 0$ を満たす値 x を $\alpha(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} st - g(t) &= st - (t\alpha(t) - f(\alpha(t))) \\ &= \{s - \alpha(t)\}t + f(\alpha(t)) \\ &= \{s - \alpha(t)\}f'(\alpha(t)) + f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

である。

(i) $s - \alpha(t) = 0$ のとき

$$st - g(t) = 0 \cdot f'(s) + f(s) = f(s)$$

である。

(ii) $s - \alpha(t) \neq 0$ のとき

平均値の定理より

$$\frac{f(s) - f(\alpha(t))}{s - \alpha(t)} = f'(c)$$

を満たす実数 c (c は s と $\alpha(t)$ の間の値) が存在する。

$$\begin{aligned} f(s) - f(\alpha(t)) &= f'(c)(s - \alpha(t)) \\ \therefore f(\alpha(t)) &= f(s) - f'(c)(s - \alpha(t)) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} st - g(t) &= (s - \alpha(t))f'(\alpha(t)) + f(s) - f'(c)(s - \alpha(t)) \\ &= (s - \alpha(t))\{f'(\alpha(t)) - f'(c)\} + f(s) \end{aligned}$$

$f'(x)$ は増加関数であるから

$$\begin{aligned} s < \alpha(t) \text{ のとき, } s < c < \alpha(t) \text{ であるから, } f'(c) < f'(\alpha(t)) \\ s > \alpha(t) \text{ のとき, } s > c > \alpha(t) \text{ であるから, } f'(c) > f'(\alpha(t)) \end{aligned}$$

であり、いずれのときも $s - \alpha(t)$ と $f'(\alpha(t)) - f'(c)$ は異符号であり

$$\begin{aligned} (s - \alpha(t))\{f'(\alpha(t)) - f'(c)\} &< 0 \\ \therefore st - g(t) &< f(s) \end{aligned}$$

である。

以上 (i)(ii) より、 $st - g(t)$ は $s = \alpha(t)$ となる t において最大値 $f(s)$ をとる。

…… (証明終わり)

【4-1】

$$f'(0) = 0, f''(x) > 0, f'''(x) < 0$$

$$F = \frac{f(b) + f(a)}{2}(b-a) - \int_a^b f(x) dx \quad (0 < a < b)$$

$$(1) \quad g(t) = \frac{f(t) + f(a)}{2}(t-a) - \int_a^t f(x) dx \quad (a \leq t)$$

とおく. $a < t$ において

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{2}(t-a) + \frac{f(t) + f(a)}{2} \cdot 1 - f(t)$$

$$= \frac{f'(t)}{2}(t-a) - \frac{f(t) - f(a)}{2}$$

$$g''(t) = \frac{f''(t)}{2}(t-a) + \frac{f'(t)}{2} \cdot 1 - \frac{f'(t)}{2}$$

$$= \frac{f''(t)}{2}(t-a)$$

$$> 0 \quad (\because f''(t) > 0, a < t)$$

$g'(t)$ は単調増加である. さらに, $g'(a) = 0$ であるから, $a < t$ において $g'(t) > 0$ である.

したがって, $g(t)$ は単調増加である. さらに, $g(a) = 0$ であるから, $a < t$ において $g(t) > 0$ である.

よって, $0 < a < b$ のとき $g(b) > 0$, すなわち $F > 0$ である. …… (証明終わり)

- $x > 0$ において, $f''(x) > 0$ より, $y = f(x)$ のグラフは下に凸である. さらに, $f'(x)$ は単調増加であり, かつ $f'(0) = 0$ であるから, $x > 0$ においては $f'(x) > 0$, すなわち $f(x)$ は単調増加である. よって, $y = f(x)$ ($x > 0$) のグラフは右図となる. $0 < a < b$ のとき

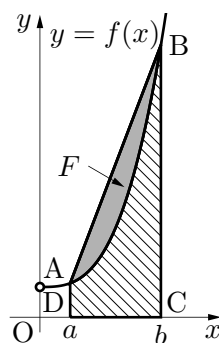
$$\begin{aligned} F &= \frac{f(b) + f(a)}{2}(b-a) - \int_a^b f(x) dx \\ &= (\text{台形 } ABCD \text{ の面積}) - (\text{斜線部分の面積}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

である.

$$(2) \quad h(t) = \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+t}{2}\right) + f(t) \right\} (t-a) - g(t) \quad (a \leq t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t) + f(a)}{2}(t-a) - f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a) - g(t) \\ &= \int_a^t f(x) dx - f\left(\frac{t+a}{2}\right)(t-a) \end{aligned}$$



である.

$$\begin{aligned} h'(t) &= f(t) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right) \frac{1}{2} \cdot (t-a) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) \cdot 1 \\ &= f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right) \frac{t-a}{2} \end{aligned}$$

である. 平均値の定理より

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right)}{t - \frac{t+a}{2}} &= f'(c) \\ \therefore f(t) - f\left(\frac{t+a}{2}\right) &= f'(c) \frac{t-a}{2} \end{aligned}$$

となる c ($\frac{t+a}{2} < c < t$) が存在するから

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(c) \frac{t-a}{2} - f'\left(\frac{t+a}{2}\right) \frac{t-a}{2} \\ &= \left\{ f'(c) - f'\left(\frac{t+a}{2}\right) \right\} \frac{t-a}{2} \\ &> 0 \quad \left(\because f''(x) > 0 \text{ より } f'(x) \text{ は単調増加かつ } \frac{t+a}{2} < c, a < t \right) \end{aligned}$$

であり, $h(t)$ は単調増加である. さらに, $h(a) = 0$ であるから

$$h(t) > 0 \quad (a < t)$$

が成り立つ.

よって $0 < a < b$ のとき $h(b) > 0$, すなわち

$$F < \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a)$$

である.

…… (証明終わり)

- $y = f(x)$ 上の点 $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ における接線 ℓ の方程式は

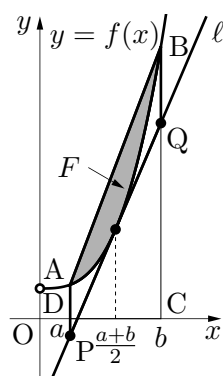
$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

であり, ℓ と直線 AD, BC との交点をそれぞれ P, Q とおく

$$\begin{aligned} AP &= f(a) - \left\{ f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(a - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \\ &= f(a) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{a-b}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ BQ &= f(b) - \left\{ f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(b - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} \\ &= f(b) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{b-a}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

台形 APQB の面積は

$$\frac{1}{2} (AP + BQ)(b-a) = \frac{1}{2} \left\{ f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} (b-a)$$



である. F は台形 APQB に含まれる図形の面積であり

$$F < (\text{台形 APQB の面積})$$

であるから

$$F < \frac{1}{2} \left\{ f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} (b-a)$$

である.

(3) 目標の不等式の左辺 $f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$ は

$$(\text{左辺}) = \left\{ f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\} + \left\{ f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\}$$

と変形される. 平均値の定理より

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) = f'(c_1) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) = f'(c_1) \frac{b-a}{2}$$

$$f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(c_2) \left(b - \frac{a+b}{2} \right) = f'(c_2) \frac{b-a}{2}$$

となる c_1, c_2 $\left(a < c_1 < \frac{a+b}{2} < c_2 < b \right)$ が存在するから

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= -f'(c_1) \frac{b-a}{2} + f'(c_2) \frac{b-a}{2} \\ &= \{f'(c_2) - f'(c_1)\} \frac{b-a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である.

$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調増加であり, $f'(0) = 0$ かつ $0 < a < c_1$ より $f'(c_1) > 0$ である. $f'(c_2) - f'(c_1) > f'(c_2)$ であるから

$$(\text{左辺}) < f'(c_2) \frac{b-a}{2} < f'(b) \frac{b-a}{2} \quad (\because b-a > 0, c_2 < b)$$

すなわち

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) < \frac{b-a}{2} f'(b)$$

である.

…… (証明終わり)

(4) (2) と ① より

$$\begin{aligned} F &< \frac{1}{2} \cdot \{f'(c_2) - f'(c_1)\} \frac{b-a}{2} \cdot (b-a) \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \{f'(c_2) - f'(c_1)\} \quad (0 < a < c_1 < c_2 < b) \end{aligned}$$

平均値の定理より

$$f'(c_2) - f'(c_1) = f''(d)(c_2 - c_1)$$

となる d ($c_1 < d < c_2$) が存在する. したがって

$$F < \frac{(b-a)^2}{4} f''(d)(c_2 - c_1)$$

である. $f'''(x) < 0$ より $f''(x)$ は単調減少であるから

$$f''(d) < f''(a) \quad (\because a < d)$$

$0 < c_2 - c_1 < b - a$ であるから

$$F < \frac{(b-a)^2}{4} \cdot f''(a)(b-a)$$

すなわち

$$F < \frac{(b-a)^3}{4} f''(a)$$

である.

…… (証明終わり)